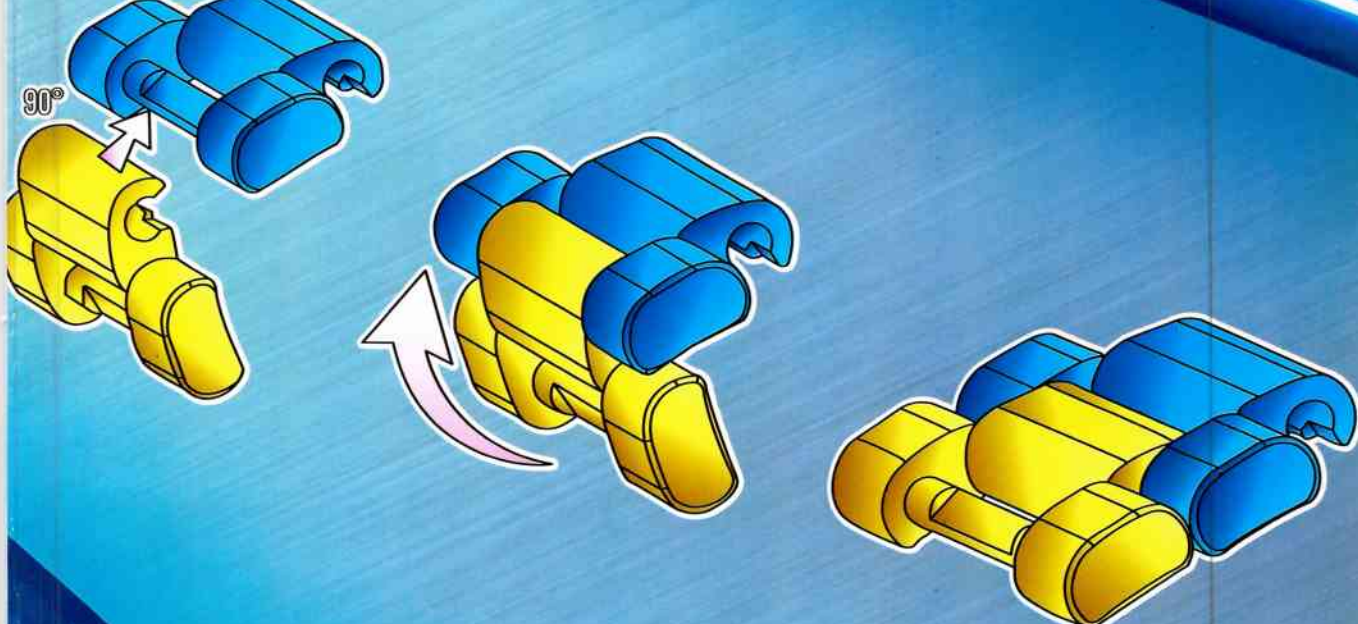
PLAN DE ESTUDIOS 2015

Matemáticas III

Geometría y Trigonometría



José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco

DGEP
Dirección General de Escuelas Preparatorias

Universidad Autónoma de Sinaloa | Dirección General de Escuelas Preparatorias

DGEP

Dirección General de Escuelas Preparatorias

DIRECTORIO

Dr. Juan Eulogio Guerra Liera
Rector

MC. Jesús Madueña Molina
Secretario General

MC. Manuel de Jesús Lara Salazar
Secretario de Administración y Finanzas

Dr. Armando Flórez Arco
Director de DGEP

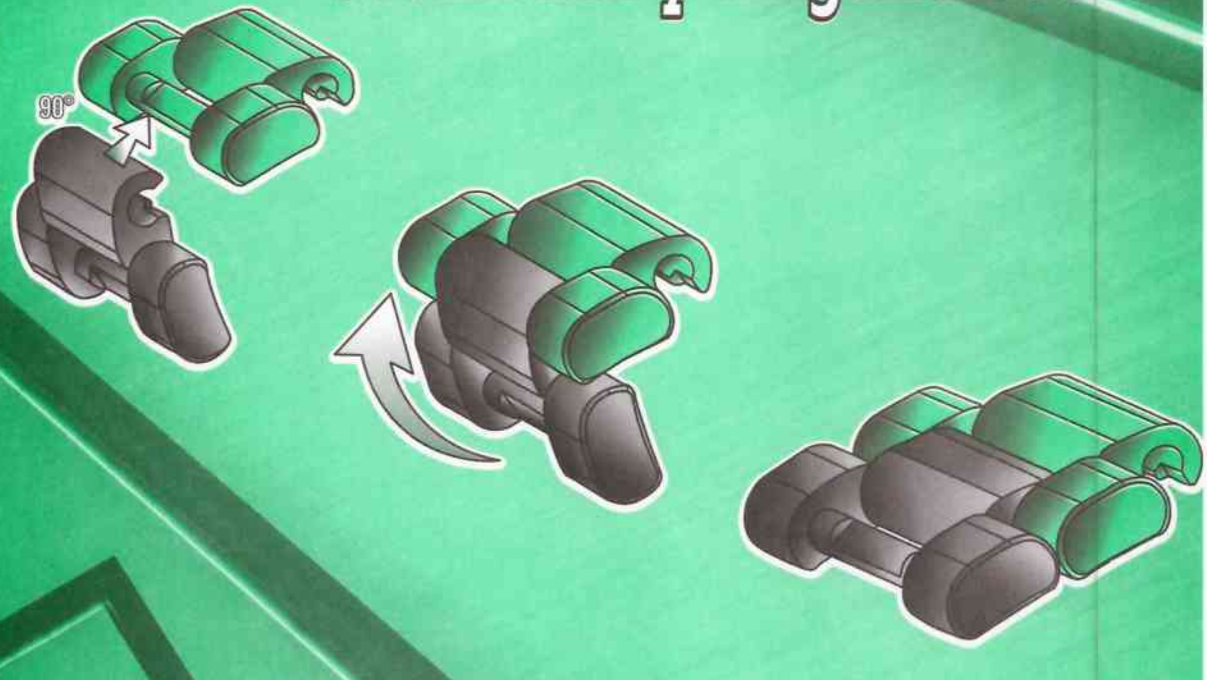
Dr. Armando Bueno Blanco
Subdirector Académico de DGEP

Mtro. Simón Martín Díaz Quiñónez
Subdirector Administrativo de DGEP

PLAN DE ESTUDIOS 2015

Matemáticas III

Geometría y Trigonometría



José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco

Plan 2015

Matemáticas III

Geometría y Trigonometría

José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco

UAS/DGEP

Matemáticas III
Geometría y trigonometría

José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco

Primera edición, mayo de 2008
Segunda edición, agosto de 2014
Tercera reimpresión, agosto de 2016
Tercera edición, agosto de 2017
Cuarta edición, agosto de 2018
Quinta edición, agosto de 2019

Diseño de portada e interior: José Alfredo Juárez Duarte,
Irán Ubaldo Sepúlveda León y Leticia Sánchez Lara
Ilustración de portada: High Trest le Bridge, Madrid, Iowa, United States de Tony Webster

Editorial: Servicios Once Ríos Editores
Río Usumacinta 821 Colonia Industrial Bravo
Culiacán, Sin. Tel-fax: 712-2650

Edición con fines académicos, no lucrativa.
Tiraje 19 000 ejemplares

Impreso en México
Printed in Mexico

A mi querido nieto de nueve años,
José Alfredo Juárez Valdespino, quien:
en cada prueba de azúcar, en cada sueño
interrumpido, en cada ocasión que escucha
la música que avisa que el nevero viene...
y se controla,
¡ÉL ES MARAVILLOSO!

Dios le da las mejores batallas
a sus mejores guerreros!

Contenido

UNIDAD 4
TRIGONOMETRÍA: APLICACIONES
DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

UNIDAD 5
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: APLICACIONES
DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

UNIDAD 6
POLÍGONOS Y CIRCUNFERENCIA

Presentación

Estimado (a) profesor (a),
Estimado (a) estudiante:

Les presentamos la tercera edición del libro *Matemáticas III*, destinado a estudiantes del tercer semestre de Bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Matemáticas III, es la asignatura en la que se estudia la geometría y la trigonometría. Con este estudio, se promueve que el estudiante analice las características y propiedades de las figuras geométricas planas, que le permitan plantear y resolver problemas que tienen que ver con la cuantificación de magnitudes del espacio y propiedades físicas de los objetos que lo rodean. Además, debido a su naturaleza, la geometría es un magnífico recurso para el desarrollo de la creatividad, el pensamiento lógico inductivo y deductivo, el razonamiento crítico y la capacidad de comunicar, argumentar y estructurar mejor ideas. Asimismo, la geometría como modelo de disciplina organizada lógicamente, ofrece la oportunidad de explorar en la medida de lo posible, la estructura formal de las matemáticas. Por lo anterior, *Matemáticas III* favorece específicamente el desarrollo de las siguientes competencias disciplinares básicas:

- *Competencia 1.* Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- *Competencia 2.* Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
- *Competencia 3.* Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- *Competencia 4.* Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información.
- *Competencia 6.* Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- *Competencia 8.* Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

En cuanto a las competencias genéricas, Matemáticas III promueve principalmente, el desarrollo de aquellas competencias relacionadas con las categorías "*se expresa y comunica (competencia* 4)" y "*piensa crítica y reflexivamente* (competencias 5 y 6)", las cuales permiten expresar ideas y conceptos mediante representaciones matemáticas, así como resolver problemas de una manera crítica y reflexiva. Además, la gran relevancia que tiene el usar estrategias basadas en el trabajo colaborativo, permite incidir en el desarrollo de la competencia que a la letra dice: "*Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos (competencia* 8)".

Para el logro de estos objetivos, esta nueva edición, al igual que las anteriores, enfatiza en la participación activa del estudiante, para que descubra los conceptos y propiedades de los objetos geométricos, observando, midiendo, imaginando, haciendo conjeturas, generalizando, deduciendo y justificando la validez de propiedades, procedimentos y resultados. Para tal fin, se presentan actividades que estimulan la experimentación, el planteamiento de conjeturas y la búsqueda de explicaciones. De esta manera, se busca cambiar una enseñanza focalizada en transmisión pasiva de información a través de clases meramente expositivas y práctica memorística, hacia una enseñanza que ocupe más a los estudiantes a través de discusiones, aprendizaje cooperativo y actividades prácticas.

Concientes de que para lograr cabalmente estos objetivos, resulta de mucha ayuda el uso de tecnología, desde la edición anterior se incorporaron instrucciones para empezar a utilizar el software libre denominado Geogebra.

Al igual que en las ediciones anteriores, en el acercamiento que proponemos al razonamiento deductivo, se toman en cuenta las dificultades que encuentran los estudiantes cuando se enfrentan a demostraciones, y también los problemas y desafíos a los que se enfrentan los docentes cuando quieren situar las demostraciones como una cuestión central en las clases de geometría. Es verdaderamente complicado lograr que los estudiantes sientan la necesidad de hacer una demostración. Ésto, básicamente se debe a que se necesita una cultura de la argumentación que permee durante todos los ciclos escolares, y que no se limite a la clase de geometría. Para avanzar en esta cuestión, la apuesta de este libro, es involucrar al estudiante (previo a toda demostración deductiva), en el proceso de razonamiento inductivo mediante el ciclo investigativo de experimentar, observar, analizar y plantear hipótesis o conjeturas. Todo esto, con la ayuda de tecnología, específicamente con el software Geogebra.

Debemos evitar al máximo, empezar enunciando la propiedad a estudiar, para dar la oportunidad de que el estudiante la descubra inductivamente, y hacerlo conciente, de que en matemáticas, esta prueba no basta, puesto que las matemáticas sostienen su poder y autoridad en el razonamiento deductivo como único método válido para explicar y obtener conclusiones.

En esta tercera edición, se promueve el uso de ***diagramas en flujo*** para mostrar el razonamiento seguido previo a toda demostración. Asimismo, se prioriza la demostración en forma de párrafo, postergando hasta la última unidad las demostraciones en dos columnas. Compartimos la idea de que una demostración debe aportar a la comprensión de conceptos, por lo que, si no se logra ésto, la demostración no tiene razón de ser. En este sentido, le apostamos al diagrama en flujo como una manera de promover que se describa lo más ampliamente posible la red de conexiones entre conceptos y propiedades implicados, y evitar que se aprendan de memoria cada una de las demostraciones.

Atendiendo lo consignado en nuestro programa de estudio, la unidad de "Polígonos y circunferencia", se convierte ahora en la sexta unidad. El uso de la tecnología para explorar las propiedades de tales figuras, sigue siendo de vital importancia. Esta es una unidad de aprendizaje clave para consolidar el razonamiento geométrico tanto inductivo como deductivo. Las facilidades que proporciona el software Geogebra, para explorar objetos geométricos, nos permite promover el desarrollo del razonamiento inductivo, mientras que la formalización de las conjeturas obtenidas, permite integrar muchas definiciones, postulados y teoremas ya vistos en las unidades anteriores. En este escenario, mención especial merece la aplicación de los criterios de congruencia de triángulos, los cuales podrán consolidarse al aplicarlos en esta unidad.

En trigonometría, al asumir que cada estudiante cuenta con una calculadora científica, se ha omitido el uso de fórmulas de reducción para funciones trigonométricas de ángulos mayores que 90° o negativos. Sin embargo, siguen siendo motivo de aprendizaje los conceptos subyacentes a estas cuestiones. Básicamente, esto es relevante, en aquellos casos en donde la calculadora sólo presenta un valor como solución, o lo que sucede con los valores negativos del seno y tangente, cuya solución requiere de una interpretación. Por ejemplo, si $\tan x = -1$, la calculadora proporciona como solución $x = -45°$. En el caso de las identidades trigonométricas de suma de ángulos, se siguen valorando como conocimiento indispensable para cursos más avanzados, de tal forma que sólo interesa que el alumno conozca cómo se obtienen, y la única aplicación que se exige, es la que se refiere a la obtención de identidades para ángulos dobles y ángulos mitad.

Con respecto a la evaluación, en esta edición, a lo largo de cada una de las unidades y en el momento más oportuno, se han incluido los aspectos a evaluar, con sus respectivas evidencias, así como las competencias y atributos que se pretenden evaluar. Asimismo, al final de cada unidad, se han incluido más problemas contextualizados que ayuden a evaluar las competencias disciplinares. Debemos destacar, que en esta era de reforma, el aprendizaje de contenidos de ninguna manera es un asunto secundario, por lo que, para atender el principio clave del aprendizaje de que los estudiantes deben saber cuál es el objetivo de aprendizaje que deben aprender, hemos incluido al inicio de cada unidad de aprendizaje, indicadores de desempeño. Éstos, tienen además como objetivo orientar al docente en su trabajo, así como a los alumnos en su autoevaluación. Todas estas ideas deben verse como un primer aporte en aras de ir avanzado en la complejidad que implica el concretar un plan de evaluación según los nuevos estándares planteados en la reforma actual. Esperamos que sirvan para que cada profesor innove y comparta sus experiencias.

En relación al uso del libro en el salón de clase, reiteramos que un libro de texto, es un instrumento de enseñanza para el profesor y un instrumento de aprendizaje para el alumno. El libro de texto debe estar diseñado de tal manera que fomente el trabajo independiente de los estudiantes. Este fue un principio que orientó el presente trabajo. Holmes plantea que: "La peor manera de enseñar es hablar, y la mejor manera de aprender es hacer".

En esta idea, debemos tener muy en cuenta que: "En el proceso docente-educativo el profesor debe enseñar lo esencial, lo fundamental. Explicar aquellos aspectos básicos de los cuales se pueden deducir todo un conjunto de elementos derivados, secundarios que no deben, por lo general ser explicados, para que los alumnos, los desarrollen de manera independiente. A la exposición inicial se le debe dedicar el mínimo imprescindible del tiempo y a la independencia escolar el máximo. Todo el contenido no debe ser expuesto por el docente, sólo lo esencial, lo que posibilite que el alumno trabaje y forme la habilidad". Bajo esta concepción, el libro está basado en el desarrollo de actividades de aprendizaje con una estructura de andamiaje para que el alumno las realice de manera independiente, con ayuda esporádica del docente. Esta metodología, aporta al logro de una competencia muy valorada en la Reforma, que tiene que ver con la categoría "aprende de forma autónoma", y que tiene el siguiente enunciado: "Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida (competencia 7)".

En esta era de la información, todo libro nuevo es producto de muchos otros. Cada uno de los libros o materiales citados en la bibliografía, aportaron algo al presente trabajo, desde una idea vaga, hasta una propuesta que sólo requirió un ajuste.

Queremos agradecer a todos los profesores que durante algún ciclo de estos últimos nueve años utilizaron las primeras ediciones de este libro. Mención especial merecen por sus comentarios, sugerencias y revisión crítica, nuestros compañeros profesores Héctor Benjamín Jacobo Cabanillas, Carlos Jorge Cossío, Sandra Luz Navarrete Sarabia, Guillermo Ávila García, Ramón Chávez Valenzuela, Rodolfo Romero López, Francisco Milán Carrillo y Armando Niebla. Agradecimiento especial merece el profesor Gildardo Sánchez Nieto por haber hecho una revisión exhaustiva de la segunda edición.

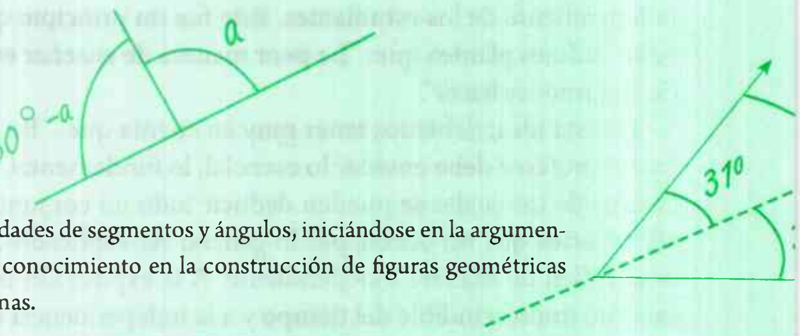
Finalmente, les deseamos a todos los estudiantes y profesores muchos éxitos en el estudio y esperamos que este libro les apoye en este propósito común. Asimismo, agradecemos de antemano, los comentarios, sugerencias y críticas que tengan a bien hacernos llegar a la dirección: ***jjuarez@uas.edu.mx.***

ATENTAMENTE
Culiacán Rosales, Sinaloa, julio de 2017.

LOS AUTORES

1 unidad

Relaciones entre ángulos. Construcción de figuras geométricas básicas



Propósito de unidad

Analiza las características y propiedades de segmentos y ángulos, iniciándose en la argumentación geométrica, y aplica dicho conocimiento en la construcción de figuras geométricas básicas y en la solución de problemas.

Indicadores de desempeño

- Realiza construcciones geométricas básicas.
- Aplica la propiedad aditiva de segmentos y ángulos dibujando diagramas como técnica para resolver problemas.
- Realiza conversiones en el sistema sexagesimal (de grados a minutos y segundos y viceversa).
- Realiza demostraciones deductivas de manera informal, relativas a los ángulos opuestos por el vértice, y a ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal.
- Aplica las propiedades de los ángulos adyacentes, opuestos por el vértice y los formados por rectas paralelas y una transversal, para determinar las medidas de ángulos.
- Resuelve problemas de su entorno utilizando las propiedades de ángulos.

Competencia disciplinar a evaluar

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

Atributos de Competencias genéricas a evaluar

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante diversos sistemas de representación simbólica.

4.3 Identifica y evalúa las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.

5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva en la búsqueda y adquisición de nuevos conocimientos.

5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

8.3 Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con los conocimientos y habilidades que posee.

Actividad preliminar

¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

a) El siguiente enunciado que describe al planeta Tierra, aparece en un libro de Geografía de Primaria (la información relativa a segmentos, fue un agregado nuestro). Léelo con atención.

La Tierra tiene forma aproximada de una esfera. Los puntos polares son puntos de intersección de una recta que pasa por el centro de la esfera con la esfera misma. Dicha recta se llama eje de la Tierra. El segmento que une los puntos polares es un diámetro de la Tierra y tiene una longitud aprodimada de 12 732 km. El punto medio del diámetro, es el centro de la Tierra. La Tierra realiza el movimiento de rotación que dura 24 horas y se da cuando el planeta gira sobre su propio eje, en dirección oeste a este. El eje terrestre no es perpendicular a la órbita terrestre, tiene un ángulo de inclinación de 23°27' con respecto a la perpendicular del plano orbital.

En el texto anterior, se han utilizado términos geométricos para describir una situación del mundo real.

En palabras de Galileo: «*El mundo está escrito en lengua matemática; sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas; sin esos caracteres (o signos) es humanamente imposible entender una palabra... El mundo, ¡un libro!; sus letras, ¡números!; sus signos, ¡figuras geométricas!*

En la primera unidad de este curso, recordarás los conceptos geométricos básicos, muchos de los cuales ya estudiaste en cursos anteriores. Con tus conocimientos previos resuelve la actividad 1.

Actividad 1

- Aspecto a evaluar: subproducto
- Evidencia: Autoevaluación

En equipo realiza lo siguiente:

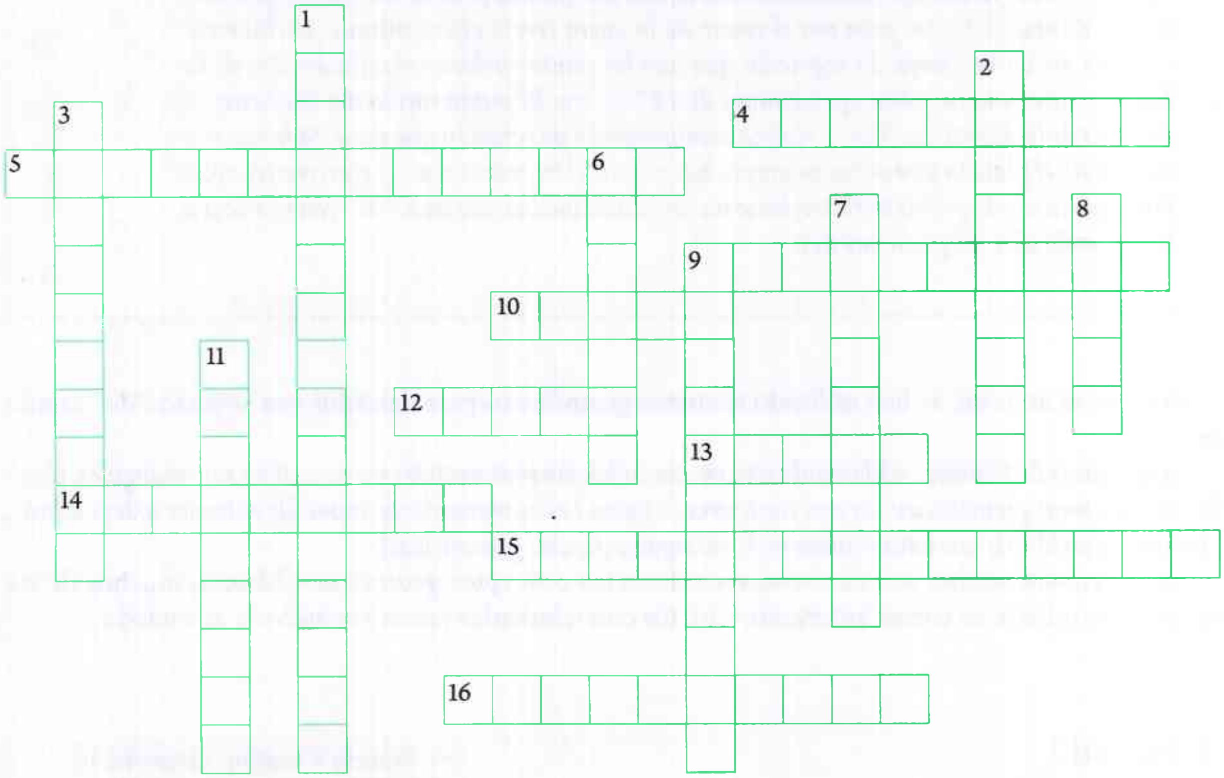
a) Muestra la información sobre nuestro planeta proporcionada arriba mediante un dibujo.

b) Investiga en libros de matemáticas de primaria, y secundaria, el significado de al menos diez conceptos geométricos. Deberás reportar figuras y ejemplos.

c) Investiga la importancia que tiene la geometría en la arquitectura y en el arte en general.

¿Qué tanto recuerdas de lo que estudiarás en esta unidad?

d) Utiliza tus conocimientos previos para resolver el siguiente crucigrama, de ser necesario consulta el material de esta unidad y revisa tus respuestas.



Horizontales

4. Rectas que se encuentran en el mismo plano y por más que se prolongan nunca se cruzan.
5. Par de ángulos cuya suma de medidas es 180°.
9. Puntos que se encuentran sobre la misma recta.
10. Ángulo que mide menos de 90°.
12. Ángulo que mide 180°.
13. Ángulo que mide 90°.
14. Razonamiento que consiste en observar datos, reconocer patrones y hacer generalizaciones basadas en esos patrones.
15. Rectas que al cruzarse forman ángulos iguales.
16. Par de ángulos que tienen un lado común que los separa y los otros dos lados en una misma recta.

Verticales

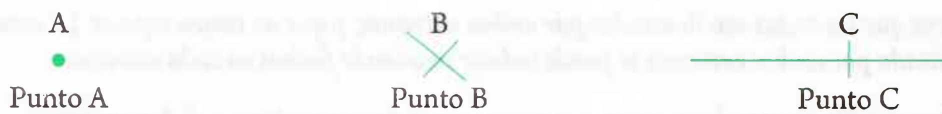
1. Par de ángulos internos no adyacentes colocados en distintos lados de una transversal.
2. Recta que pasa por el punto medio de un segmento y es perpendicular a él.
3. Punto que divide a un segmento en dos segmentos iguales.
6. Ángulos que mide más de 90° y menos de 180°.
7. Rayo que parte del vértice de un ángulo y lo divide en dos ángulos iguales.
8. Dados dos puntos, sólo pasa una.
9. Ángulos que tienen la misma medida.
11. Razonamiento que consiste en mostrar que ciertas afirmaciones son los resultados lógicos de hechos aceptados.

1.1 Conceptos preliminares

En esta lección recordarás algunos conceptos geométricos que constituyen las bases para la construcción de todos el lenguaje geométrico.

Punto. El concepto de punto es difícil de definir. Nos lo podemos imaginar como la marca más pequeña que se puede dibujar.

Los puntos se designan con una letra mayúscula y se representan con un círculo pequeño, una cruz o por una raya como se muestra en las siguientes figuras.



El punto, como objeto o figura geométrica, se considera que no tiene dimensiones y se usa para indicar una posición en el espacio.

Aceptando la idea anterior de punto, se plantea la siguiente definición:

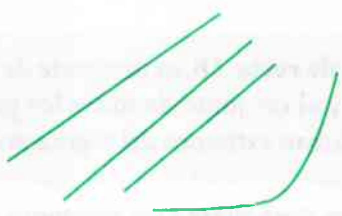
Figura geométrica, es un conjunto de puntos

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 2

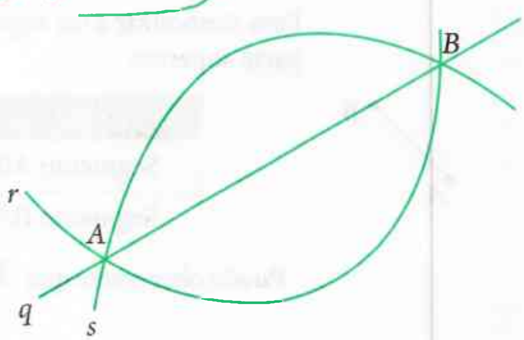
Observa a tu alrededor e identifica seis figuras geométricas. Dibuja éstas figuras y al trazar los dibujos, imagínalas formadas por conjuntos de puntos.

A continuación recordaremos los significados de algunas figuras geométricas básicas.

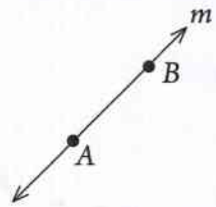


Línea. La línea está constituida por una sucesión continua de puntos. Nos la podemos imaginar como el trazo más delgado que se puede dibujar.

Recta. Por dos puntos pasan cualquier número de líneas, pero únicamente una línea recta pasa por ellos. En la siguiente figura, por A y B pasan las líneas q, r y s. La línea q es una línea recta. En lo sucesivo, para referirnos a una línea recta, simplemente le llamaremos recta. Una recta es unidimensional.



Otras experiencias que sugieren la idea de recta pueden ser un hilo tirante, el borde de una regla, etcétera.
Para simbolizar a una recta, se utiliza una letra minúscula (como la letra q), o bien, dos puntos de ella como se muestra a continuación:

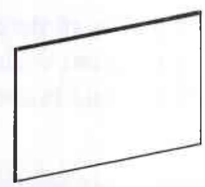


En palabras	En símbolos
Recta AB	$\overleftrightarrow{AB}$
Recta BA	$\overleftrightarrow{BA}$
Recta m	m

Debes tener presente las siguientes propiedades de las rectas:

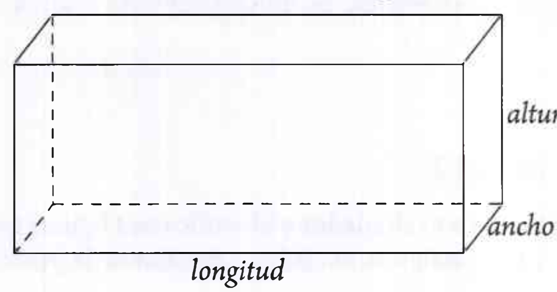
- *Se considera que las rectas son ilimitadas por ambos extremos, y que no tienen espesor. La característica de ser ilimitada por ambos extremos se puede indicar marcando flechas en cada extremo.*
- *Se considera que dos puntos determinan una y sólo una recta que contiene a dichos puntos.*

Plano. Un plano, es una figura llana, lisa, sin grosor. Un plano, suele ser evocado por una hoja de papel apoyada sobre una mesa, la propia superficie de una mesa, el pizarrón, etcétera. Un plano es bidimensional.



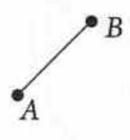
Espacio. Se considera el espacio como el conjunto de todos los puntos. Cualquier subconjunto de puntos del espacio se considera como una figura geométrica.

Sólido. Un sólido es un espacio limitado cualquiera. Tiene tres dimensiones: longitud, ancho y altura. Un sólido es tridimensional.



Un **segmento de recta** AB, es una parte de recta determinada por los puntos A y B y el conjunto de todos los puntos entre A y B. Los puntos A y B se llaman extremos del segmento.

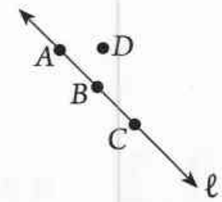
Para simbolizar a un segmento, se utilizan sus dos puntos extremos y una raya en la parte superior.



En palabras	En símbolos
Segmento AB	$\overline{AB}$
Segmento BA	$\overline{BA}$

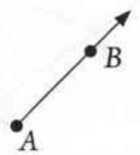
Puede observarse que $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ representan el mismo segmento de recta.

Observación. Si A, B y C son puntos de la recta ℓ, como se muestra en la figura siguiente, se dice que el punto B está entre los puntos A y C. Asimismo, el punto D no está entre los puntos A y C.



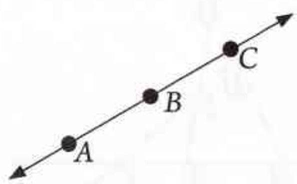
Una **semirrecta o rayo**, es una parte de una recta que comienza en un punto y se extiende infinitamente en una dirección.

Una semirrecta se designa con dos letras y una flecha en la parte superior. La primera letra es el extremo y la segunda letra es cualquier otro punto sobre la semirrecta. Así que la semirrecta AB, abreviada $\overrightarrow{AB}$, es la parte de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene el punto A y todos los puntos sobre AB que estén del mismo lado del punto B.

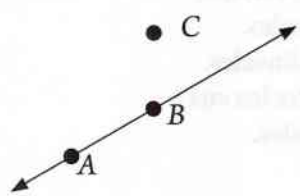


En palabras	En símbolos
Rayo o semirrecta AB	$\overrightarrow{AB}$

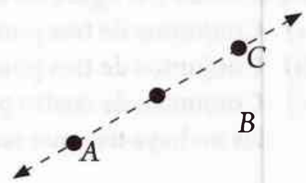
Puntos colineales son puntos que están en la misma recta.



A, *B* y *C* son puntos colineales.

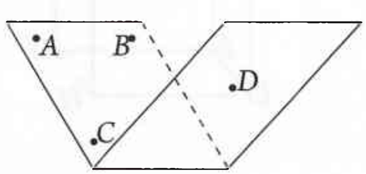


A, *B* y *C* no son puntos colinea-les.

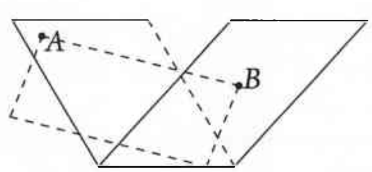


A, *B* y *C* son puntos colineales, según la recta imaginaria de tra-zos discontinuos.

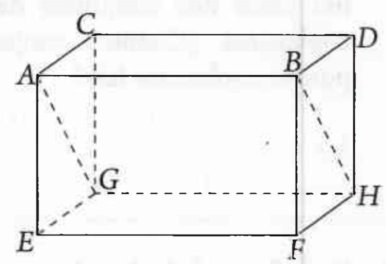
Puntos coplanares son puntos que están en el mismo plano.



A, *B* y *C* son puntos coplanares. *A*, *B*, *C* y *D* son no coplanares.



A y *B* son puntos coplanares se-gún el plano imaginario de tra-zos discontínuos.



A, *B*, *E* y *F* son puntos coplana-res *A*, *B* y *H* son puntos copla-nares.

Observación. Debe tenerse en cuenta que existen puntos que son colineales aunque las rectas no estén marcadas; asimismo, exiten puntos coplanares en planos imaginarios.

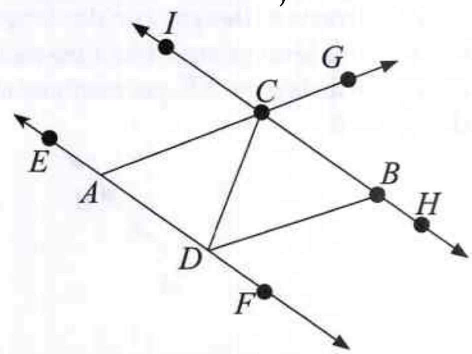
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1 y 5.1

1.1 EJERCICIOS

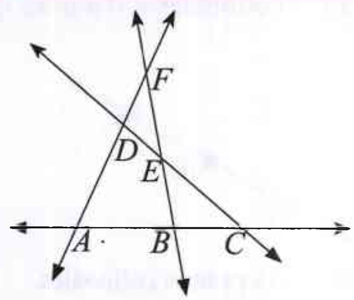
1. Construye una lista de definiciones (un diccionario) en tu cuaderno. Cada vez que encuentres una nueva definición geométrica, añádala a tu lista. Ilustra cada definición con un dibujo. También usa símbolos cuando así se requiera.

2. Observa la figura de la derecha y completa el cuadro.

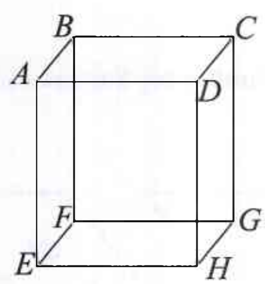
Puntos	*A*,
Rectas	
Segmentos	$\overline{AD}$,
Rayos	



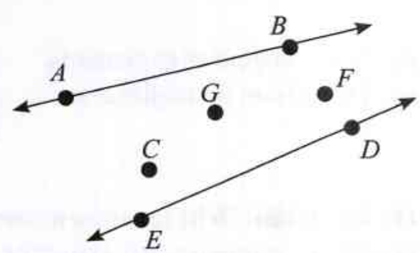
3. De acuerdo a la figura de la derecha, escribe:
   a) Conjuntos de tres puntos colineales.
   b) Conjuntos de tres puntos no colineales.
   c) Conjuntos de cuatro puntos entre los cuales no haya tres que sean colineales.



4. En la figura de la derecha $\{B, C, H, E\}$ es un conjunto de cuatro puntos coplanares. Nombra otros dos conjuntos de cuatro puntos coplanares. ¿Cuántos conjuntos de cuatro puntos coplanares hay?



5. En la figura de la derecha:
   a) Menciónense conjuntos de tres puntos colineales.
   b) Representa con símbolos adecuados tres rectas que pasen por algún par de puntos.



1.2 Estudio de segmentos

Consideremos el segmento AB representado en el siguiente cuadro:

A diferencia de la recta que se extiende indefinidamente, el segmento es una porción limitada por dos puntos. Por tanto, a cada segmento le podemos asignar una medida llamada **longitud del segmento,** que es la **distancia** existente entre sus puntos extremos.

Recuerda que para referirnos al segmento AB, escribimos $\overline{AB}$. Para referirnos a la medida o longitud de AB, escribimos AB (sin la barra superior).

Por ejemplo, si $\overline{AB}$ mide tres unidades, escribimos $AB = 3$

Si en el segmento AB, localizamos el punto C entre A y B, podemos establecer la **propiedad aditiva** del segmento que consiste en sumar las longitudes tal como se indica a continuación.

La propiedad aditiva establece que:

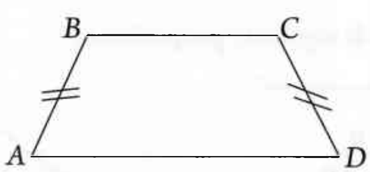
$AB = AC + CB$

Propiedad aditiva de segmentos. Si C está entre A y B, entonces $AB = AC + CB$.

Se dice que dos segmentos son congruentes cuando sus longitudes son iguales.

El signo para la congruencia es $\cong$. Es importante recordar que el signo de igualdad (=) , se usa entre números o medidas iguales, mientras que el signo de congruencia, se usa entre figuras congruentes. Sin embargo, es muy frecuente llamar **segmentos iguales** a los segmentos congruentes.

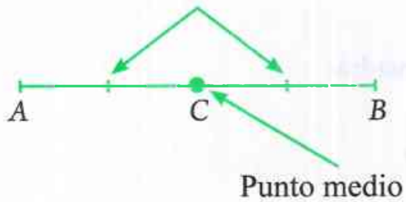
En los dibujos geométricos, las partes congruentes se señalan con marcas idénticas. En la figura siguiente $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{DC}$. Puedes indicar que estos segmentos tienen las mismas longitudes en cualesquiera de las siguientes formas: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $AB = DC$.



El segmento AB es congruente con el segmento DC (en símbolos: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$,)

El **punto medio** de un segmento es un punto que divide el segmento en dos segmentos congruentes. El punto medio o cualquier recta que pase por él, se dice que **biseca** o **bisecta** al segmento.

Las marcas iguales indican que los segmentos AC y CB, son congruentes.



Si C es punto medio de $\overline{AB}$, entonces $AC = CB$.

Utilizaremos la definición de punto medio, para recordar el significado de una proposición *si-entonces*. Una proposición lógica, es una oración que afirma o niega algo de alguna cosa; en consecuencia puede ser calificada de falsa o verdadera.

Una **proposición *si-entonces*** es una proposición de la forma «*si p, entonces q*», donde *p* y *q* son proposiciones simples. A ***p*** se le llama **hipótesis**, y ***q*** es la **conclusión**. El símbolo $p \rightarrow q$ (léase «*p implica q*»), se usa para representar una proposición *si-entonces*. Muchas definiciones geométricas describen proposiciones *si-entonces*.

Lee con atención:

Cuando se invierten las partes «*si*» y «*entonces*» de una proposición «*Si - entonces*», se obtiene el inverso de la proposición.

Ejemplo

Proposición *si - entonces*: Si C es punto medio de $\overline{AB}$, entonces $AC = CB$.
Inverso de la proposición *si - entonces*: Si $AC = CB$, entonces C es punto medio de AB

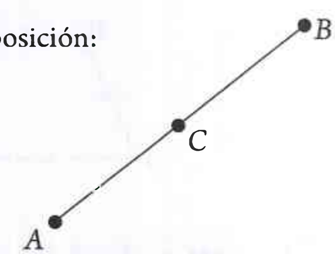
- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 3

a) Haz un dibujo para indicar el siguiente hecho: «*El punto M, es punto medio del segmento PQ*».

b) Con la información del inciso anterior completa la siguiente proposición:
Si M es punto medio de PQ, entonces ____________________.

c) En la figura, si C es punto medio del segmento AB,
$AC = 3a + 8$ y $CB = 10a - 6$, encuentra el valor de AB.



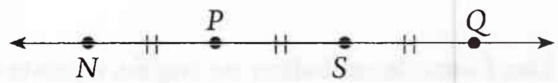
1.2 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1 y 5.1

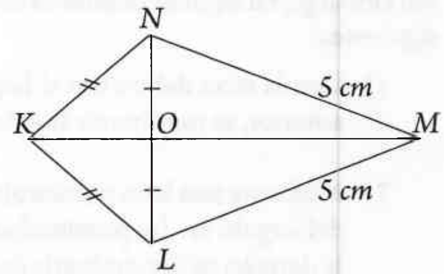
1. Agrega a tu diccionario los términos de esta lección, que consideres más relevantes.

Para los ejercicios 2-8, completa cada oración. Considera que $PS = 3$ cm.

2. El punto medio de $\overline{PQ}$ es __________________.

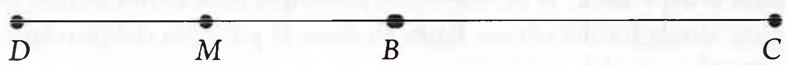


3. $NQ =$ __________.
4. Otro nombre para NS es ____________.
5. S es el _____________________ de $\overline{SQ}$.
6. P es punto medio de __________________.
7. $\overline{NS} \cong$ __________.
8. Otro nombre para $\overline{NS}$ es ________.
9. Con base en la figura de la derecha, nombra todos los pares de segmentos congruentes. Usa el símbolo de congruencia para escribir tus respuestas.



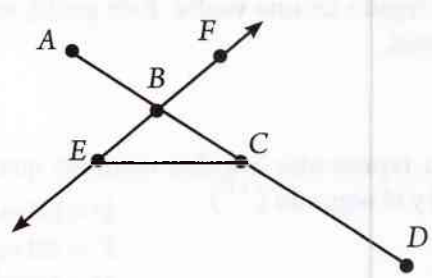
10. Utiliza la figura de la derecha y los datos de cada inciso parea calcular x y la medida de TU.
    a) $TU = 2x$, $UB = 3x + 1$, $TB = 21$
    b) $TU = 4x - 1$, $UB = 2x - 1$, $TB = 5x$
    c) $TU = 1 - x$, $UB = 4x + 17$, $TB = -3x$

11. En el siguiente segmento, M es punto medio de $\overline{DB}$ y $DB = BC$. Encuentra la longitud de $\overline{DC}$ si MB es igual a 8.



12. Si P es punto medio del $\overline{AB}$, hallar el valor de x si $AB = 20$ y $PB = 8x + 14$.

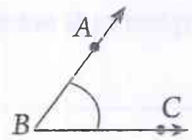
13. En la figura adjunta, $\overline{EC}$ biseca a $\overline{AD}$ en C, y $\overline{EF}$ biseca a $\overline{AC}$ en B. Encuentra el valor de x y la medida del segmento indicado en cada uno de los ejercicios siguientes:
    a) $AB = 3x + 6$, $BC = 2x + 14$; AC
    b) $AC = 5x - 8$, $CD = 16 - 3x$; AD
    c) $AD = 6x - 4$, $AC = 4x - 3$; CD
    d) $AC = 3x - 1$, $BC = 12 - x$; AB



1.3 Medición de ángulos

Ángulo es una figura formada por dos rayos o semirrectas con un origen común. Las dos semirrectas se llaman lados del ángulo. El origen común se llama vértice del ángulo.

En la figura, el punto B es el vértice del ángulo; los lados son $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.



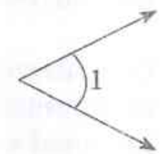
Una forma de simbolizar un ángulo, consiste en utilizar tres letras mayúsculas, de las cuales la del vértice va enmedio de las otras dos, que se colocan sobre los lados del ángulo. Así, el ángulo de la figura anterior, se puede nombrar ángulo ABC. En símbolos $\angle ABC$ o $\angle CBA$.

En palabras	En símbolos
Ángulo ABC	$\angle ABC$
Ángulo CBA	$\angle CBA$

Sin embargo, en algunas ocasiones será conveniente denotar ángulos de cualesquiera de las dos maneras siguientes:

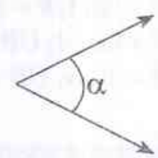
1) Con la letra del vértice si hay un sólo ángulo que tenga este vértice. Así, el ángulo de la figura anterior, se nombraría ángulo B. (En símbolos: $\angle B$).

2) Mediante una letra minúscula o un número que se escribe entre los lados del ángulo en las proximidades del vértice. Así, el ángulo de la figura de la derecha se denominaría ángulo 1. (En símbolos $\angle 1$).



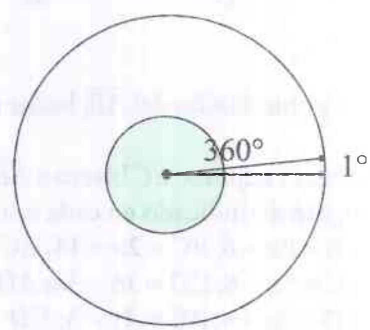
Para nombrar ángulos, con frecuencia se usan las letras del alfabeto griego. Recordemos algunas de estas letras:

α: alfa　　β: beta　　γ: gamma
δ: delta　　θ: theta　　ε: épsilon



La **medida de un ángulo** depende de la extensión del plano que debe barrer uno de los lados del ángulo, cuando se le hace girar alrededor del vértice hasta alcanzar la posición del otro lado. El tamaño de un ángulo no depende de la longitud de sus lados.

Como unidad de medida habitual se usa el grado (°). Un ángulo de una vuelta contiene 360°. (Ver la figura de la derecha). Por tanto, un grado es un ángulo que es $\frac{1}{360}$ del ángulo de una vuelta. Este grado, se llama *grado sexagesimal.*

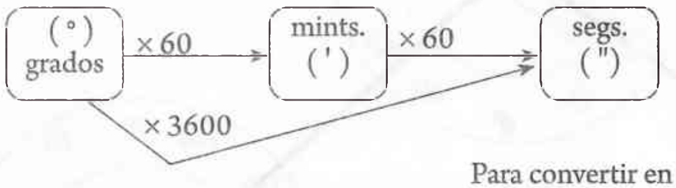


Para representar ángulos menores que 1° se utilizan unidades más pequeñas como son el minuto (') y el segundo ('')

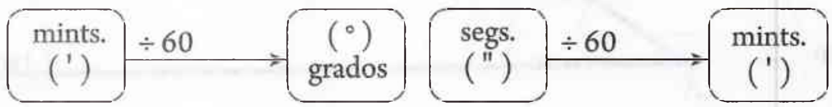
$1° = 60 \text{ minutos} = 60'$
$1' = 60 \text{ segundos} = 60''$
$1° = 3600''$

Generalmente, cualquier ángulo se representa por $a^{o}\ b'\ c''$, de tal manera que el número de minutos y segundos no sobrepase a 60, para tener una lectura única de cada ángulo. La notación $5^{o}\ 13'\ 12''$ significa 5 *grados*, 13 *minutos*, 12 *segundos*.

Conversión de grados a minutos y segundos.



Para convertir en sentido inverso, se divide.



Ejemplo 1

a) Expresa 40.3° en grados y minutos.
b) Expresa 23° 27' únicamente en grados.
c) Expresa 15° 20'40" únicamente en grados.

Solución

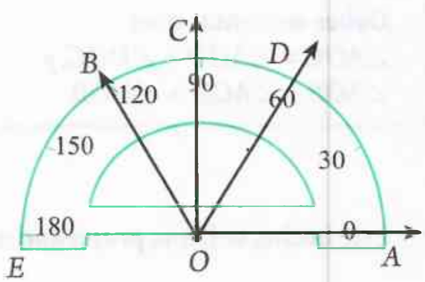
a) $40.3^{o} = 40^{o} + 0.3^{o}$
$= 40^{o} + (0.3 \times 60)'$
$= 40^{o} + 18'$
$= 40^{o}\ 18'$

b) $23^{o}27' = 23^{o} + 27'$
$= 23^{o} + (27 \div 60)^{o}$
$= 23^{o} + 0.45^{o}$
$= 23.45^{o}$

c) $15^{o}\ 20'40'' = 15^{o} + 20' + 40''$
$= 15^{o} + 20' + (40 \div 60)'$
$= 15^{o} + 20' + 0.67'$
$= 15^{o} + 20.67'$
$= 15^{o} + (20.67 \div 60)^{o}$
$= 15^{o} + 0.34^{o}$
$= 15.34^{o}$

Para realizar la **medición de ángulos** se utiliza un *transportador.* En este caso, debemos tener presente que la unidad de medida es el grado sexagesimal (°).

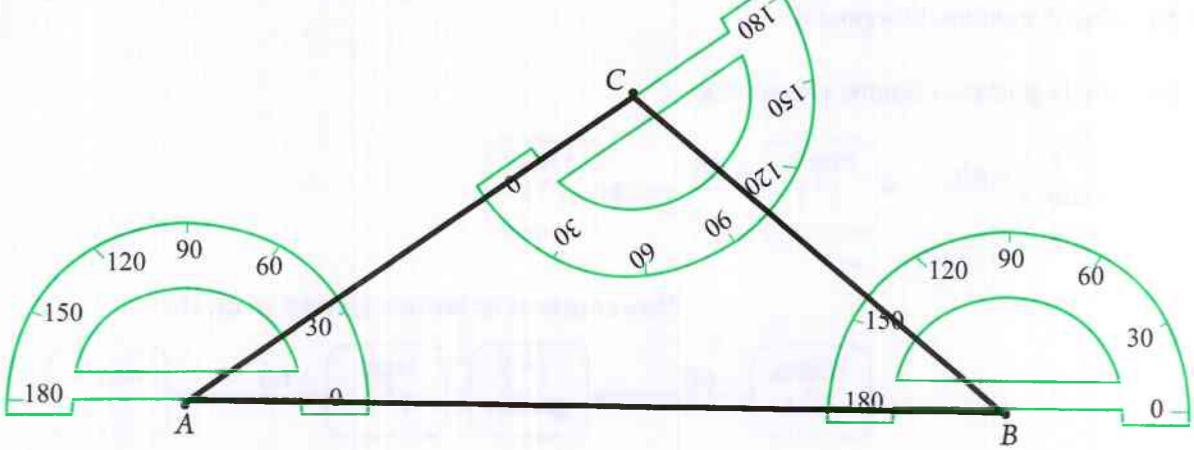
En la figura de la derecha, el transportador nos indica que el $\angle AOD$ mide 60°. A continuación se muestran las diferentes maneras de describir la medida del ángulo *AOD* de dicha figura.



1) $\measuredangle AOD = 60^{o}$
2) $m\angle AOD = 60^{o}$
3) $\angle AOD = 60^{o}$

Estrictamente, una cosa es el ángulo *AOD* cuyo símbolo es $\angle AOD$, y otra la medida del ángulo, para la cual previamente debe elegirse la unidad de medida.
Por tanto, para indicar que la medida del ángulo *AOD* es 60°, debería usarse la notación $m\angle AOD = 60^{o}$ o $\angle AOD = 60^{o}$.
Sin embargo, con frecuencia también se escribe $\angle AOD = 60^{o}$

La siguiente figura nos muestra cómo medir los ángulos de un triángulo. Utiliza tu transportador y calcula la medida de $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.



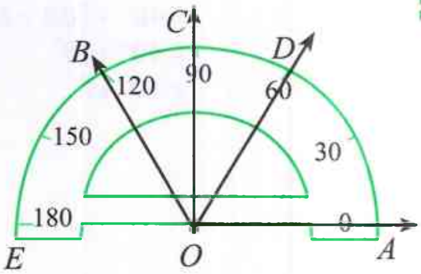
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 4

Con base en la figura de la derecha, contesta correctamente:

$\angle AOD =$ ______ $\angle DOC =$ ______ $\angle DOB =$ ______

$\angle AOC =$ ______ $\angle AOB =$ ______



¿Qué relación existe entre $\angle AOD$, $\angle DOC$ y $\angle AOC$? ____________________

¿Qué relación existe entre $\angle AOD$, $\angle DOB$ y $\angle AOB$? ____________________

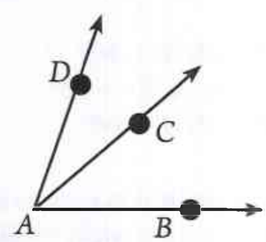
Debes encontrar que:

$\angle AOC = \angle AOD + \angle DOC$, y

$\angle AOB = \angle AOD + \angle DOB$

Este hecho, se llama ***propiedad aditiva del ángulo.***

Propiedad aditiva del ángulo. Si tres semirrectas *AD*, *AC* y *AB* tienen el vértice *A* en común, y el rayo *AC* está dentro del ángulo *DAB*, entonces el ángulo *DAB* es la suma de los ángulos *DAC* y *CAB*.

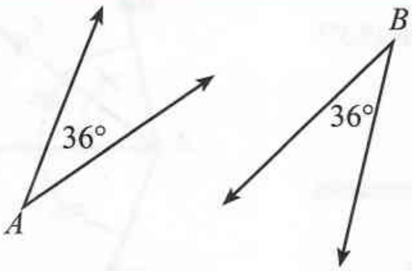


$\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB$

Una vez discutido la medida de ángulos, podemos establecer el significado de congruencia de ángulos.

Si la semirrecta $\overrightarrow{AC}$, de la figura anterior pudiera moverse, en un momento dado dividiría al ángulo DAB, en dos ángulos congruentes.

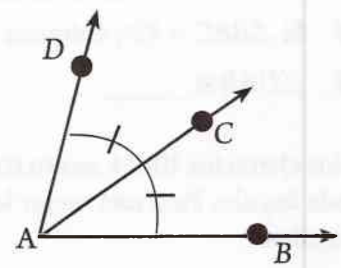
Se dice que dos ángulos son **congruentes** cuando tienen la misma medida.



$\angle A$ es congruente con $\angle B$.
En símbolos: $\angle A \cong \angle B$.

Observación: Estrictamente debemos hablar de ángulos congruentes y de medidas de ángulos iguales. Sin embargo, al igual que con los segmentos, usaremos como sinónimos ángulos iguales y ángulos congruentes. Por lo que, en la figura anterior, también se escribe: $\angle A = \angle B$.

Un rayo o semirrecta es la **bisectriz** de un ángulo si contiene el vértice y divide el ángulo en dos ángulos congruentes. También se dice, que la bisectriz *biseca* o *bisecta* al ángulo.



$\angle DAC \cong \angle CAB$

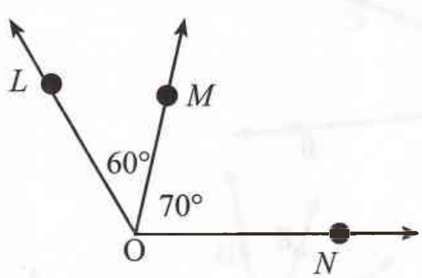
En la figura de la derecha, $\overrightarrow{AC}$ biseca al $\angle DAB$, por lo que $\angle DAC \cong \angle CAB$. Se utilizan marcas idénticas para mostrar que dos ángulos son congruentes.

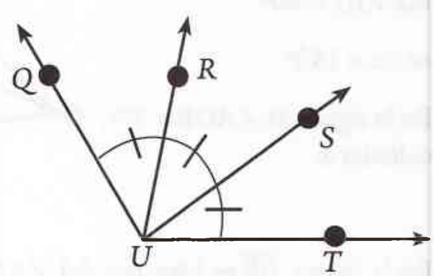
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 5

a. Haz un dibujo y completa: Si $\overrightarrow{PS}$ es bisectriz de $\angle QPR$ entonces ________________.

b. Utiliza las siguientes figuras para contestar lo siguiente:



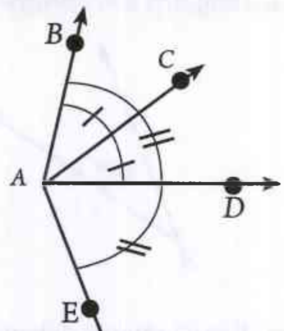


- Identifica y nombra todas las bisectrices que aparecen.
- Para cada bisectriz, nombra el ángulo que biseca.
- Nombra todos las parejas de ángulos congruentes que aparecen.

1.3 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1 y 5.1

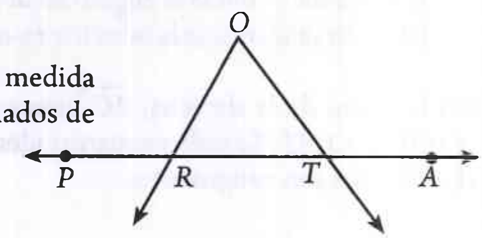
1. Ahora, repasa la lección 1.3 y asegúrate de anotar las nuevas definiciones en tu diccionario.
2. Transforma $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ a minutos.
3. ¿A cuántos grados y minutos equivalen 18.3°?
4. Convierte a minutos y segundos $\left(\frac{3}{7}\right)^\circ$.



Con la información de la figura de la derecha contesta los ejercicios de la 5 a la 9.

5. A es________________de $\angle BAE$.
6. $\overrightarrow{AD}$ es________________de $\angle BAE$.
7. $\overrightarrow{AD}$ es ________________ de $\angle DAE$.
8. Si $\angle BAC = 42^\circ$, entonces $\angle CAE =$ ______
9. $\angle DAB \cong$ ______

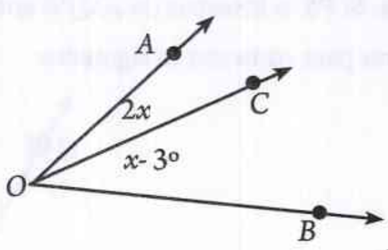
Para los ejercicios 10- 14, usa tu transportador para encontrar la medida de cada ángulo. Para una mejor lectura, puedes prolongar los lados de los ángulos.

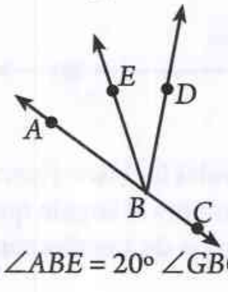


10. $m\angle PRO$
11. $m\angle ORT$
12. $m\angle O$
13. $m\angle RTO$
14. $m\angle ATO$

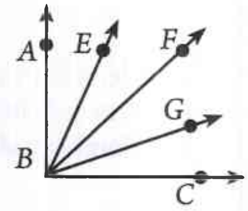
Para los ejercicios 15 -17, usa tu transportador para dibujar y marcar cada ángulo con la medida dada.

15. $m\angle MNO = 15^\circ$
16. $m\angle RIG = 90^\circ$
17. $m\angle z = 160^\circ$
18. En la figura Si $\angle AOB = 27^\circ$, calcular x.





19. En la figura, $\overrightarrow{BE}$ es bisectriz del $\angle ABD$. Si $\angle ABE = 6x + 2^\circ$ y $\angle DBE = 8x - 14^\circ$, encuentra $\angle ABE$.



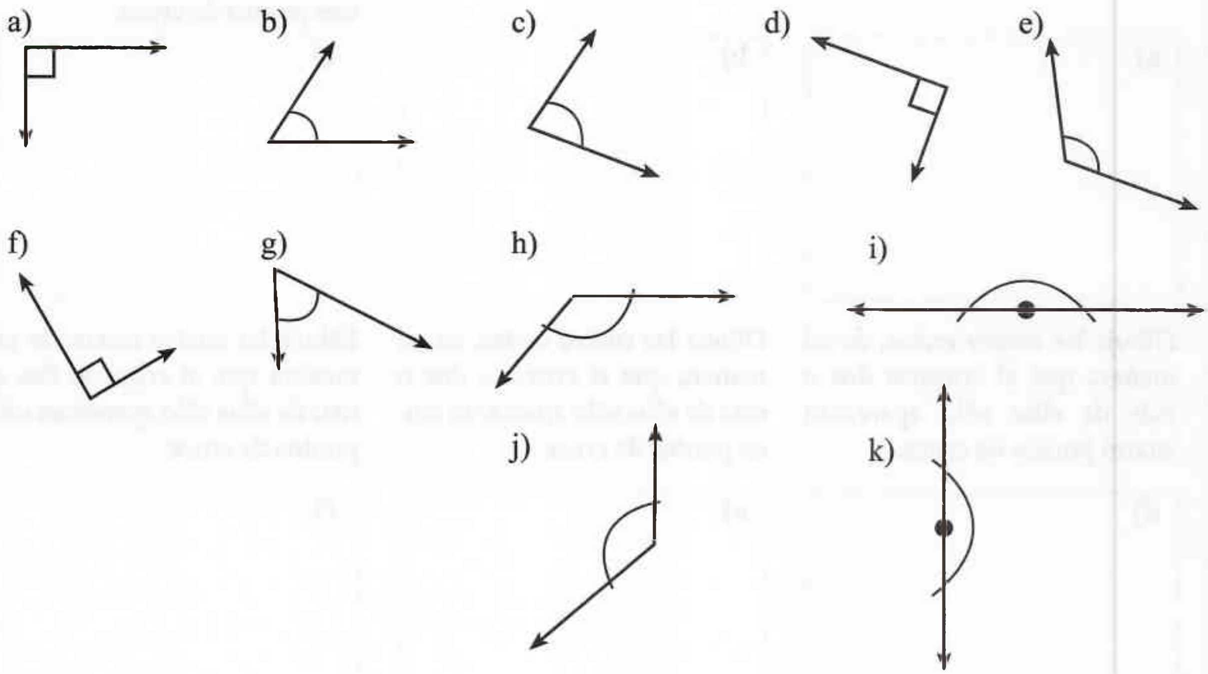
20. En la figura, $\overrightarrow{BF}$ biseca a $\angle EBG$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ABE = 20^\circ$ $\angle GBC = 24^\circ$. ¿Cuánto mide $\angle ABF$?

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

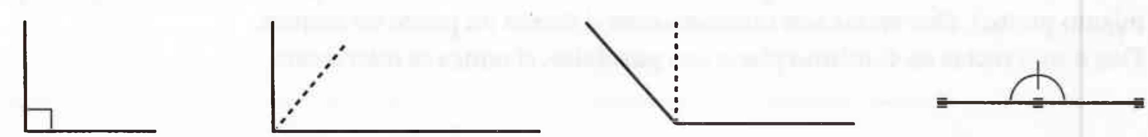
1.4 Tipos de ángulos

Actividad 6

1) Mide cada uno de los siguientes ángulos y agrúpalos como tú consideres apropiado, indicando el criterio usado. Trata de recordar el nombre que recibe cada grupo de ángulos.



2) El cuadro siguiente, resume la clasificación de ángulos según su medida. Compara la clasificación que hiciste con esta información.



Ángulo recto | Ángulo agudo | Ángulo obtuso | Ángulo llano

a) Un ángulo de 90º se llama **ángulo recto**
b) Un ángulo menor que 90º se llama **ángulo agudo**
c) Un ángulo mayor que 90º y menor que 180º se llama **ángulo obtuso.**
d) Un ángulo de 180º se llama **ángulo llano**.

3) Elabora un mapa conceptual que relacione la información involucrada con el concepto ángulo.

Posición relativa de dos rectas en el plano

La realización de la siguiente actividad, te permitirá explorar las distintas posiciones de dos o más rectas en el mismo plano.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 7

Dibuja cuatro rectas, de tal manera que sólo se crucen en un punto.

a)

Dibuja cuatro rectas, de tal manera que no se crucen en ningún punto.

b)

Dibuja cuatro rectas, de tal manera que al cruzarse dos o más de ellas sólo aparezcan tres puntos de cruce.

c)

Dibuja las cuatro rectas, de tal manera que al cruzarse dos o más de ellas sólo aparezcan cuatro puntos de cruce.

d)

Dibuja las cuatro rectas, de tal manera que al cruzarse dos o más de ellas sólo aparezcan cinco puntos de cruce.

e)

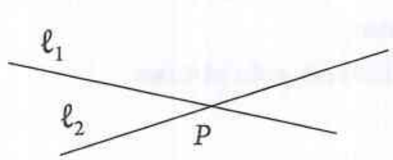
Dibuja las cuatro rectas, de tal manera que al cruzarse dos o más de ellas sólo aparezcan seis puntos de cruce.

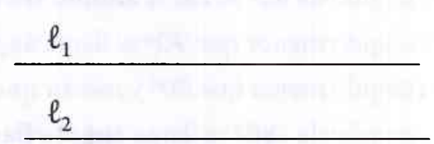
f)

Trata de relacionar la actividad realizada, con las siguientes definiciones.
Tres o más rectas en el mismo plano son **concurrentes** si tienen un punto en común (pasan por el mismo punto). Dos rectas son **intersecantes** si tienen un punto en común.
Dos o más rectas en el mismo plano son **paralelas**, si nunca se intersecan.

Ahora, debes relacionar la actividad realizada, con la siguiente información:

La posición reltiva de dos rectas en el plano se puede presentar de dos formas: se interesecan en un punto, o las rectas no se intersecan.

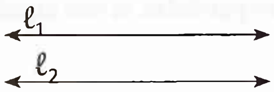




Dos rectas son **intersecantes** si tienen un punto en común.
Si no se intersecan, las rectas son **paralelas.**

Dos rectas son paralelas si no se interesecan

Para denotar que una recta ℓ_1 es paralela a una recta ℓ_2, se usa el símbolo $\parallel$.



ℓ_1 es paralela a ℓ_2

En símbolos: $\ell_1 \parallel \ell_2$

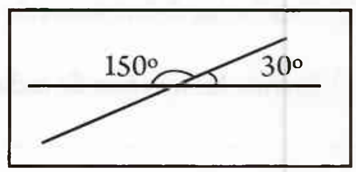
Entre las rectas que no son paralelas, existen unas de interés especial. La siguiente actividad te permitirá explorar estas rectas.

A partir de la definición de ángulos iguales o congruentes, definiremos rectas perpendiculares.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 8

En el cuadro de la derecha, se han trazado dos rectas que al cruzarse forman dos ángulos que miden 30° y 150°.



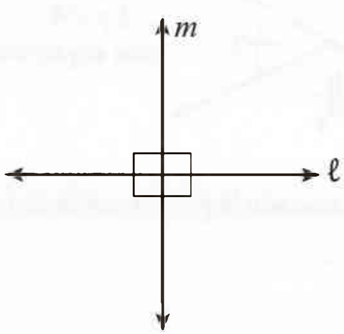
Ahora, en el cuadro deberás trazar dos rectas que al cruzarse forman dos ángulos que midan lo mismo.

¿Cuánto miden esos ángulos?______________________________

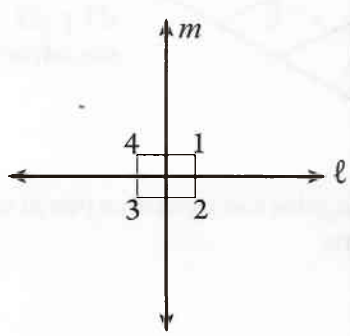
Debiste trazar dos rectas que son perpendiculares.

Dos rectas son perpendiculares si al intersectarse forman ángulos iguales. En otras palabras dos rectas son perpendiculares si al intersecarse forman ángulos rectos.

Para indicar que la recta ℓ es perpendicular a la recta m, escribimos: $\ell \perp m$

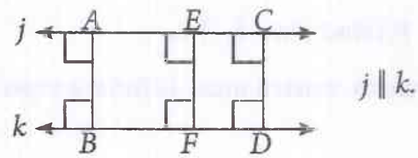


Si $l \perp m$, entonces $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$ son ángulos rectos.



Las rectas ***equidistantes*** son de mucha utilidad en geometría. Su significado está muy relacionado con el paralelismo y la perpendicularidad. Dos rectas j y k son equidistantes si la distancia de puntos arbitrarios de j a la recta k siempre es idéntica. Así pues, en la siguiente figura, si j y k son equidistantes, entonces $AB = CD = EF$. Además, se puede afirmar que, dos rectas son paralelas, si son equidistantes.

En la figura $j \parallel k$.



- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 9

a) Escribe la definición de rectas paralelas como una proposición *si-entonces*.

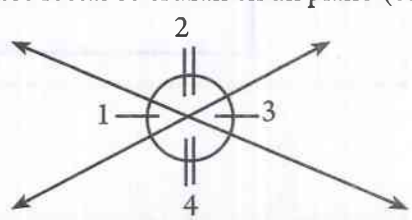
b) Escribe las definiciones de rectas perpendiculares como una proposición *si-entonces*.

c) Escribe las inversas de cada una de las proposiciones establecidas en en el inciso anterior.

Clasificación de ángulos según su posición

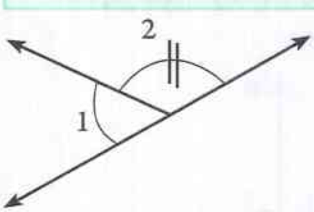
Lee con atención:

Cuando dos rectas se cruzan en un plano (cuando son intersecantes) forman cuatro ángulos de interés.

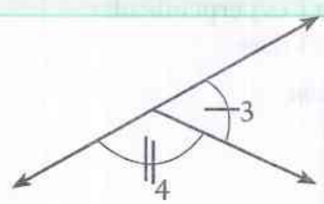


Estos ángulos, considerados en parejas, reciben el nombre de **adyacentes** o de **opuestos por el vértice.**

Los **ángulos adyacentes** son aquellos que tienen un lado común que los separa y los otros dos lados en una misma recta.

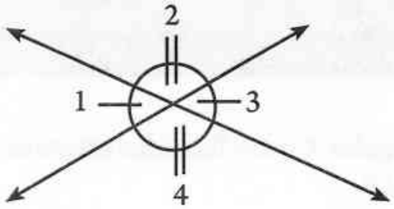


$\angle 1$ y $\angle 2$ son adyacentes.



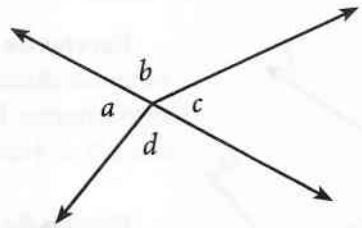
$\angle 3$ y $\angle 4$ son adyacentes.

Dos ángulos son **opuestos por el vértice**, cuando los lados de uno son la prolongación de los lados del otro.



$\angle 1$ y $\angle 3$ son opuestos por el vértice.
$\angle 2$ y $\angle 4$ son opuestos por el vértice.

Observa la figura de la derecha.
¿Son $\angle a$ y $\angle c$ opuestos por el vértice?
______ ¿Por qué? ________________
____

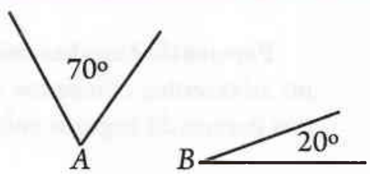


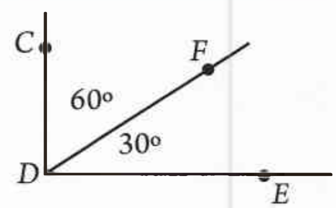
Clasificación de ángulos según la suma de sus medidas.

Lee con atención:

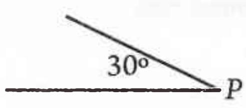
Dos ángulos son **complementarios**, si la suma de sus medidas es 90°. Cuando dos ángulos son complementarios, se dice que el uno es complemento del otro.

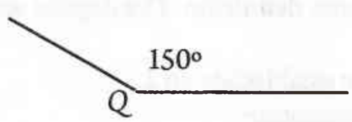
$\angle A$ y $\angle B$ son complementarios.
$\angle CDF$ y $\angle FDE$ son complementarios.

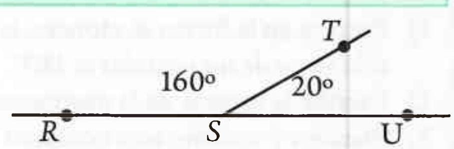




Dos ángulos son **suplementarios,** si la suma de sus medidas es 180°. Siempre que dos ángulos sean suplementarios se dice que el uno es suplemento del otro.

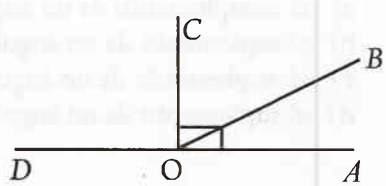






$\angle P$ y $\angle Q$ son suplementarios.
$\angle RST$ y $\angle TSU$ son suplementarios (además son adyacentes).

Completa correctamente: En la figura de la derecha, el complemento del $\angle AOB$ es el __________; el suplemento del $\angle AOB$ es el ______



1. Encontrar el suplemento de un ángulo de 67°

$$67° + x = 180°$$
$$x = 180° - 67°$$
$$x = 113°$$

2. Encontrar el complemento de 35°

$$35° + x = 90°$$
$$x = 90° - 35°$$
$$x = 55°$$

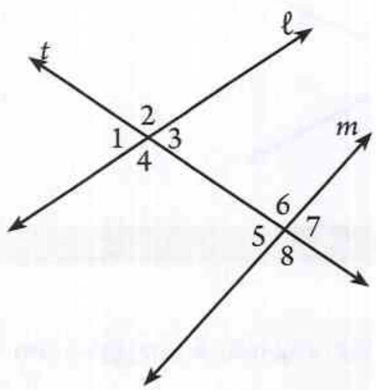
Completa.

- Si $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios, entonces __________________
- Si $\angle 3$ y $\angle 4$ son suplementarios, entonces __________________

Clasificación de ángulos según su posición en dos rectas cruzadas por una transversal

Lee con atención:

Dos rectas ℓ y *m* cortadas por una transversal *t* forman ocho ángulos. Cuatro llamados **internos**: $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$, y cuatro llamados **externos**: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ y $\angle 8$.



Parejas de ángulos correspondientes: Son dos ángulos no adyacentes situados del mismo lado de la transversal, uno interno y el otro externo. Hay cuatro parejas de ángulos correspondientes: $\angle 1$ *con* $\angle 5$, $\angle 4$ *con* $\angle 8$, $\angle 2$ *con* $\angle 6$ y $\angle 3$ *con* $\angle 7$.

Parejas de ángulos alternos internos: Son ángulos internos no adyacentes colocados en distintos lados de la transversal. Hay dos parejas de ángulos alternos internos: $\angle 3$ y $\angle 5$, $\angle 4$ y $\angle 6$.

Parejas de ángulos alternos externos: Son ángulos externos no adyacentes colocados en distintos lados de la transversal. Hay dos parejas de ángulos alternos externos: $\angle 1$ y $\angle 7$, $\angle 2$ y $\angle 8$.

Parejas de ángulos colaterales internos: Son ángulos internos no adyacentes colocados en el mismo lado de la transversal. Hay dos parejas de ángulos colaterales internos: $\angle 4$ y $\angle 5$, $\angle 3$ y $\angle 6$.

Actividad 10

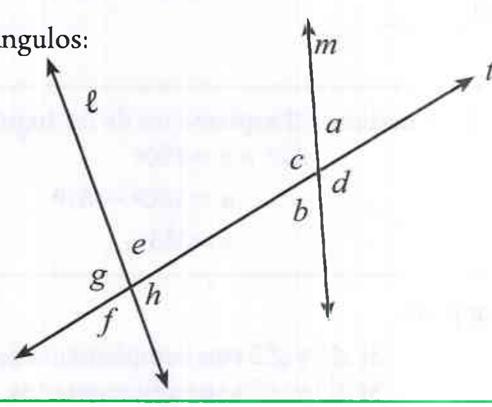
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

1) Escribe en la forma si-etonces, la siguiente definición: *Dos ángulos son suplementarios, si la suma de sus medidas es 180°.*
2) Escribe la inversa de la propocisión que estableciste en 1).
3) Plantear y resolver una ecuación para encontrar:

   a) el complemento de un ángulo de 23°
   b) el suplemento de un ángulo de 123°
   c) el suplemento de un ángulo de 60°
   d) el suplemento de un ángulo de 153°
   e) el complemento de un ángulo de 17°
   f) el suplemento de un ángulo de 173°
   g) el complemento de un ángulo de 60°
   h) el suplemento de un ángulo de 70°

4) En la figura de la derecha, localiza todos los pares de ángulos:

   a) Opuestos por el vértice
   b) Correspondientes
   c) Alternos internos
   d) Alternos externos
   e) Colaterales internos.

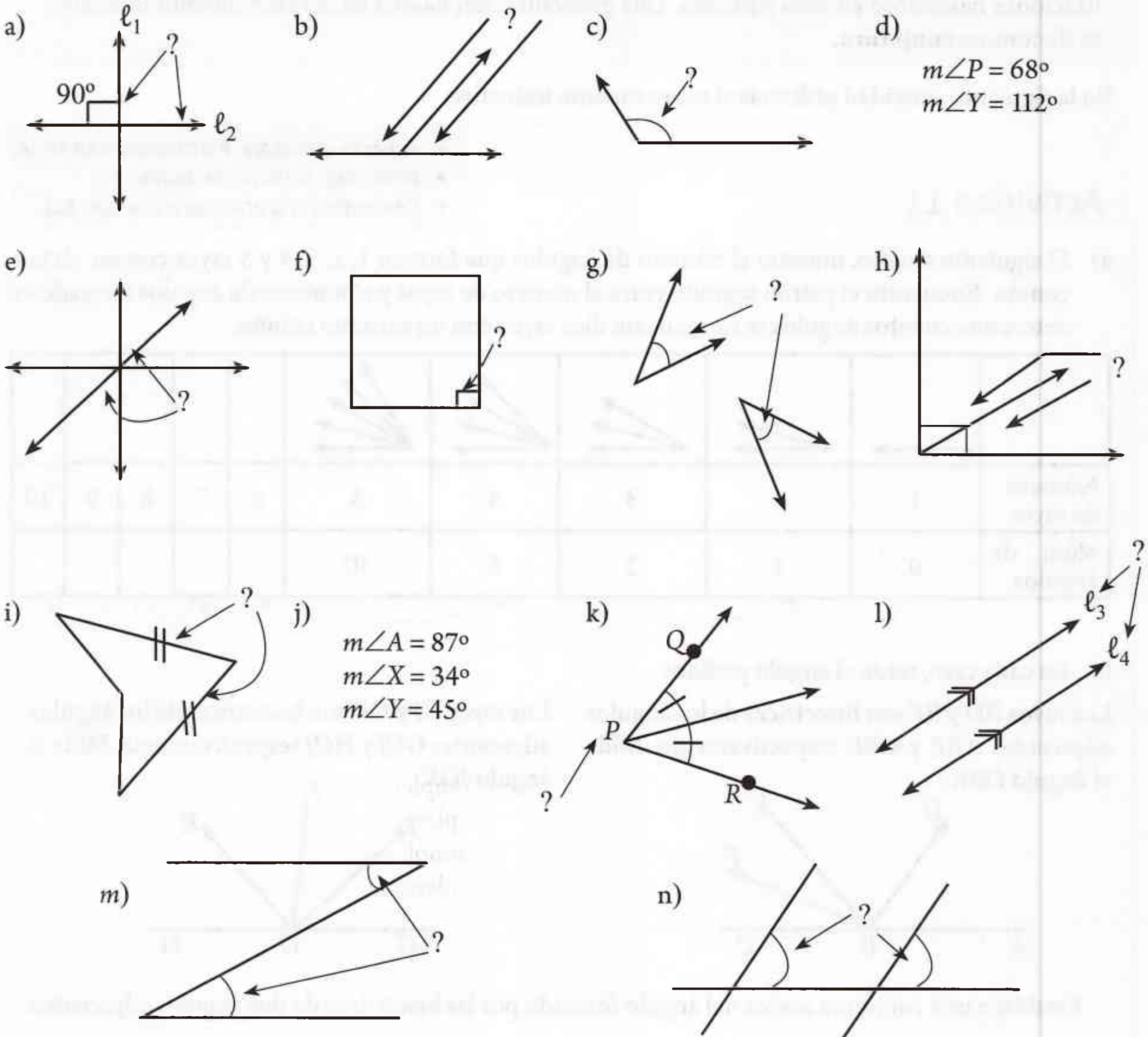


- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1 y 5.1

1.4 EJERCICIOS

1. Ahora, repasa la lección 1.4 y asegúrate de anotar las nuevas definiciones en tu diccionario.

En los ejercicios 2-15, asocia el término implícito en cada figura con una de las preguntas mostradas abajo.



2. _____ Par de ángulos opuestos por el vértice
3. _____ Par de ángulos suplementarios
4. _____ Ángulo recto
5. _____ Ángulo obtuso
6. _____ Par de ángulos congruentes
7. _____ Par de ángulos complementarios
8. _____ Par de ángulos adyacentes
9. _____ Ángulos agudos
10. _____ Ángulo bisecado
11. _____ Líneas paralelas
12. _____ Segmentos congruentes
13. _____ Líneas perpendiculares.
14. _____ Par de ángulos correspondientes
15. _____ Par de ángulos alternos internos

1.5 La demostración en geometría: axioma, postulado y teorema

Uno de los principales propósitos que debes lograr en este curso de geometría es el de mejorar tu capacidad de razonamientro lógico. En este curso se estudiarán dos tipos básicos de razonamiento: **inductivo y deductivo.**

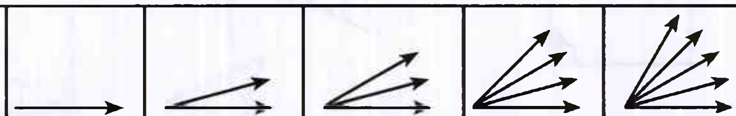
El razonamiento inductivo es el proceso de observar datos, reconocer patrones, y hacer generalizaciones basándose en esos patrones. Una generalización basada en el razonamiento inductivo, se denomina **conjetura.**

En la siguiente actividad utilizarás el razonamiento inductivo.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 11

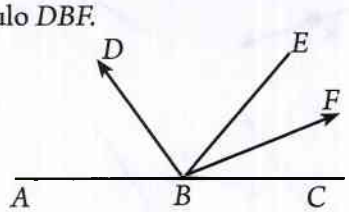
a) El siguiente cuadro, muestra el número de ángulos que forman 1, 2, 3, 4 y 5 rayos con un vértice común. Encuentra el patrón seguido entre el número de rayos y el número de ángulos formados y determina cuántos ángulos se forman con diez rayos con un extremo común.



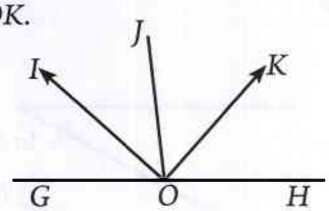
Número de rayos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Núm. de ángulos	0	1	3	6	10					

b) En cada caso, mide el ángulo pedido:

Los rayos *BD* y *BF* son bisectrices de los ángulos adyacentes *ABE* y *CBE* respectivamente. Mide el ángulo *DBF*.

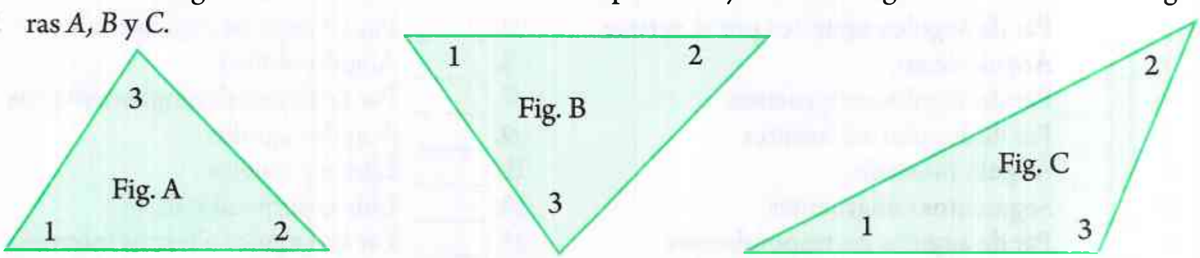


Los rayos *OI* y *OK* son bisectrices de los ángulos adyacentes *GOJ* y *HOJ* respectivamente. Mide el ángulo *IOK*.



Establece una conjetura acerca del ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos adyacentes.

c) Observa las siguientes ilustraciones. Usa un transportador y mide los ángulos interiores de las figuras *A*, *B* y *C*.



d) Mide los ángulos interiores 1, 2 y 3 de las figuras *A*, *B* y C. Registra tus resultados en la siguiente tabla.

Figura / Ángulo	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	Suma
Figura *A*				
Figura *B*				
Figura *C*				

¿Cuál es tu conjetura respecto a la suma de los ángulos interiores de todo triángulo?
____

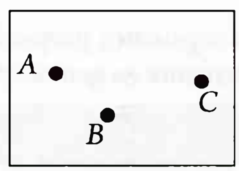
Lee con atención.

En la actividad anterior, buscaste similaridades, patrones, propiedades comunes y a partir de ellas estableciste conjeturas. En este razonamiento se procede pues de lo particular a lo general. Desafortunadamente, tal razonamiento no siempre nos conduce a resultados válidos, pues esta conclusión inductiva o conjetura, es sólo una proposición tentativa de lo que parece ser cierto en lo general. Así pues, las conclusiones a las que se llega mediante el razonamiento inductivo son sólo probables. Para demostrar que una proposición es falsa, puede citarse un contraejemplo.

Un contraejemplo, es un ejemplo que contradice lo indicado por la proposición. Si una proposición es verdadera, nunca se encontrará un contraejemplo. Por ejemplo la siguiente proposición no admite contraejemplos: "si dos rectas se intersecan, entonces esas dos rectas no son paralelas".

En cambio, la proposición "si tres puntos son coplanares, entonces son puntos colineales", se puede demostrar que es falsa presentando tres punto coplanares y que no sean colineales.

Contraejemplo: La figura muestra tres puntos coplanares que no son colineales.



- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 12

a) Primeramente, debes recordar lo que es un número primo. Enlista los primeros 15 números primos. ____

b) Se asegura que la expresión $n^2 - n + 41$ produce numeros primos cuando se reemplaza n por 1, 2, 3, 4, ... Tu reto consiste en aceptar que esta afirmación es válida para todo número natural o en su defecto encontrar un contraejemplo. Escribe tu conclusión: _______________________
____

La matemática se ha desarrollado, gracias a infinidad de personas que han experimentado con muchas conjeturas que fracasaron y algunas otras que se verificaron. Una conjetura se ha verificado desde el punto de vista formal si se demuestra que es válida en todos los casos, si se dan las mismas condiciones. La verificación formal de una conjetura se logra mediante el denominado razonamiento deductivo.

El razonamiento deductivo es el proceso de mostrar que ciertas afirmaciones son los resultados lógicos de hechos aceptados.

¿Qué distingue a un razonamiento inductivo de uno deductivo? En un primer momento, es suficiente comprender que en el razonamiento inductivo tratamos con situaciones particulares y en el deductivo manejamos situaciones generales (algebraicas).

Sin embargo, el proceso de razonamiento deductivo requiere la aceptación de unas cuantas conjeturas básicas sin comprobarlas. Estas conjeturas aceptadas sin comprobación, se llaman ***axiomas.***

Un axioma es una proposición que, siendo evidente, no requiere demostración.

Por ejemplo, aceptamos sin demostración que en los números reales se cumple que $a + b = b + a$. A los axiomas también los denominaremos propiedades. Además de referirnos a axiomas y propiedades, hablaremos de postulados. Un ***postulado*** es un axioma de naturaleza geométrica. Se eligen como axiomas y postulados, aquellas propiedades que sean más obvias y aceptables. A continuación se muestran algunos axiomas de uso frecuente en geometría.

Axiomas de los números reales de uso frecuente en geometria	
Propiedad conmutativa	Para cualesquiera números reales a y b, $a + b = b + a$, y $ab = ba$
Propiedad distributiva	Para cualesquiera números reales a, b y c, $a(b + c) = ab + ac$.
Propiedad del inverso multiplicativo	Para todo número real $a \neq 0$, $a(1/a) = 1$.

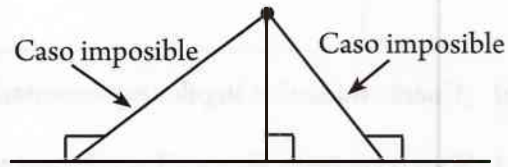
Asimismo, las siguientes propiedades que se pueden derivar de la definición de igualdad también se usan frecuentemente en geometría:

Propiedades de la igualdad de uso frecuente en geometría	
Propiedad reflexiva	Para cualesquiera número real a, $a = a$
Propiedad simétrica	Para cualesquiera números reales a y b, si $a = b$, entonces $b = a$
Propiedad transitiva	Para cualesquiera números reales a, b y c, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$ *(Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí).*
Propiedad de la adición y la sustracción	Para cualesquiera números reales a, b y c, si $a = b$, entonces $a + c = b + c$, y $a - c = b - c$.
Propiedad de cancelación	Para cualesquiera números reales a, b y c, si $a + c = b + c$, entonces $a = b$; *lo mismo que si* $a - c = b - c$ *entonces* $a = b$
Propiedad de la multiplicación y la división	Para cualesquiera números reales a, b y c, si $a = b$, entonces $ac = bc$, y si $c \neq 0$, $a/c = b/c$.
Propiedad de sustitución	Toda cantidad puede sustituirse por su igual. Por ejemplo, si $x + a = b$ y $a = c$, entonces $x + c = b$.

Ejemplos de postulados

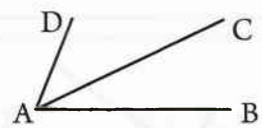
Por dos puntos sólo pasa una recta.

Dados un punto y una recta en un plano, hay exactamente una recta que pasa por el punto y es perpendicular a la recta dada.



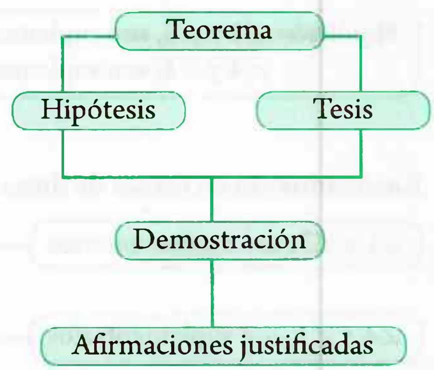
El todo es igual a la suma de sus partes.

$$AB = AC + CB$$



$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$$

Todas las demás conjeturas que pueden demostrarse como verdaderas con la ayuda de definiciones, axiomas, postulados y la lógica del razonamiento deductivo, se llaman ***teoremas.***



La verificación formal de una conjetura mediante el razonamiento deductivo, se denomina ***demostración matemática.*** En otras palabras, una demostración es un argumento lógico apoyado por proposiciones la verdad de las cuales se admite, sea como hipótesis, como definición, como axioma, como postulado o sea por haberse demostrado previamente.

En el diagrama de la derecha, se distinguen los aspectos de la demostración de un teorema. La hipótesis es la parte que se supone cierta, la tesis es la parte que se pretende demostrar mediante una secuencia de afirmaciones y razones.

Existe más de un formato para presentar una demostración; las demostraciones formales, deberán aparecer en el estudio de la geometría como sistema matemático formal. Sin embargo, para lograr ésto, los estudiantes deben encontrarse en un nivel de desarrollo que se logra gradualmente. Por tanto, por ahora, se anima a los estudiantes a usar argumentos deductivos informales escritos en forma de párrafo. Una ***demostración de párrafo*** consite en explicar los pasos de la demostración y la justificación de cada uno de éstos como una oración en un párrafo. Antes de escribir la demostración, es recomendable establecer una *ruta de razonamiento a través de un* ***esquema en forma de flujo;*** este esquema está organizado en una serie de proposiciones en orden lógico, comenzando por las proposiciones dadas. Cada proposición se escribe en un rectángulo y se utilizan flechas para mostrar cómo cada proposición encadena otra. Inclusive, si además de escribir las proposiciones incluimos sus razones o justificaciones, el esquema en si mismo, se considera una demostración. Las demostraciones en dos columnas las presentamos hasta la última unidad, una vez que se ha adquirido experiencia en dichas cuestiones.

A continuación aplicaremos lo antes expuesto, para establecer un teorema sencillo que conecta los conceptos: *ángulos adyacentes y ángulos suplementarios.* Para empezar, realiza la siguiente actividad para que puedas llegar a una conjetura.

Actividad 13

a) Dibuja dos parejas de ángulos adyacentes tales que los ángulos agudos midan lo mismo.

b) ¿Cuánto miden los ángulos suplementarios de cada pareja? ______________________

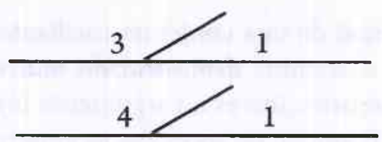
c) Si en la siguiente figura $\angle 1 = \angle 2$, ¿qué podrá asegurarse acerca de los ángulos 3 y 4? Establece una conjetura ______________________

____

Vamos a demostrar que tu conjetura es un teorema el cual se enuncia y demuestra a continuación:

Teorema: Los ángulos suplementarios de ángulos iguales, son iguales.

Hipótesis: $\angle 1$ y $\angle 3$, son suplementarios
$\angle 4$ y $\angle 1$, son suplementarios



Tesis: $\angle 3 = \angle 4$

Razonamiento en forma de flujo:

$\angle 1$ y $\angle 3$, son suplementarios → $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ → $\angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 1$

$\angle 4$ y $\angle 1$, son suplementarios → $\angle 4 + \angle 1 = 180°$ → $\angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 1$

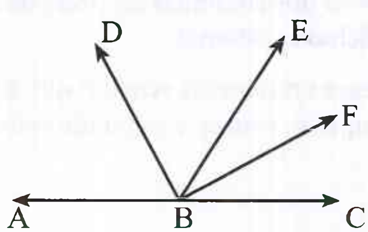
$\angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 1$ → $\cancel{\angle 1} + \angle 3 = \angle 4 + \cancel{\angle 1}$ → $\angle 3 = \angle 4$

Demostración de párrafo: Demuestra que $\angle 3 = \angle 4$.

Como $\angle 1$ y $\angle 3$, son suplementarios, $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Por la misma razón $\angle 4 + \angle 1 = 180°$. Por la propiedad transitiva de la igualdad se cumple que, $\angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 1$. Y aplicando la propiedad de sustracción de la igualdad da como resultado $\angle 3 = \angle 4$.

Ejemplo 1

En el inciso b) de la actividad 12, exploraste y se te pidió establecer una conjetura la cual debe ser parecida a la siguiente:



"Si los rayos BD y BF son bisectrices de los ángulos adyacentes ABE y CBE respectivamente, entonces $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{BF}$ ".

Demostración en forma de flujo.

$\overrightarrow{BD}$ *es bisectriz de* $\angle ABE$
Hipótesis

$\angle ABE = \angle ABD + \angle DBE$
Propiedad aditiva

$\overrightarrow{BF}$ *es bisectriz de* $\angle CBE$
Hipótesis

$\angle CBE = \angle CBF + \angle FBE$
Propiedad aditiva

$\angle ABD = \angle DBE$
Definición de bisectriz

$\angle ABE = \angle DBE + \angle DBE$
Propiedad de sustitución

$\angle CBF = \angle FBE$
Definición de bisectriz

$\angle CBE = \angle FBE + \angle FBE$
Propiedad de sustitución

$\angle ABE = 2(\angle DBE)$
Reducción de términos semejantes

$\angle CBE = 2(\angle FBE)$
Reducción de términos semejantes

$\angle ABE + \angle CBE = \angle ABC = 180°$
Propiedad aditiva.
Definición de ángulo llano.

$2(\angle DBE) + 2(\angle FBE) = 180°$
Propiedad de sustitución

$\angle DBF = \angle DBE + \angle FBE$
Propiedad aditiva

$2(\angle DBE + \angle FBE) = 180°$
Factorizando

$2(\angle DBF) = 180°$
Propiedad de sustitución

$\angle DBF) = 180°/2 = 90°$
Propiedad de la división

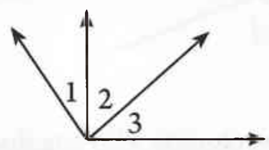
$\overrightarrow{BD}$ *y* $\overrightarrow{BF}$ *son perpendiculares*
Definición de rectas perpendiculares

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1 y 5.1

1.5 EJERCICIOS

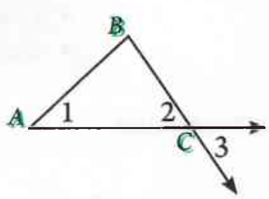
1. Agrega a tu diccionario los términos de esta lección, que consideres más relevantes.
2. Auxiliado por un razonamiento en forma de flujo, escribe en cada caso, una demostración de párrafo.

   a) Hipótesis: $\angle 2$ y $\angle 3$, son complementarios
   $\angle 1 = \angle 2$
   Demostrar: $\angle 2$ y $\angle 1$ son complementarios

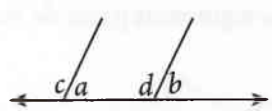


   b) Hipótesis: $AB = CD$
   Demostrar: $AC = BD$

   c) Hipótesis: $\angle 1 = \angle 2$
   Demostrar: $\angle 1 = \angle 3$



   d) Hipótesis: $\angle a = \angle b$
   Demostrar: $\angle c = \angle d$



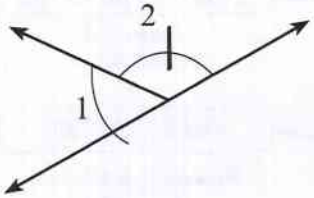
2. Resuelve:

   a. Usa el razonamiento inductivo para completar esta conjetura:
   Si $\angle b$ es el suplemento de un ángulo agudo a, y $\angle c$ es el complemento de $\angle a$, entonces $\angle b - \angle c =$ ______

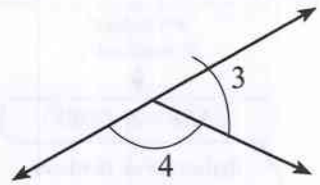
   b. Escribe una demostración de párrafo de tu conjetura de la parte a.

1.6 Descubrimiento y prueba de ángulos (1)

Observa los dos diagramas siguientes. En cada uno de ellos, se han marcado parejas de ángulos adyacentes. ¿Cuánto vale la suma de cada par de ángulos adyacentes?__________

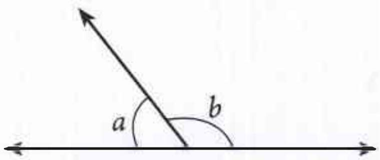


$\angle 1 + \angle 2 =$ _____



$\angle 3 + \angle 4 =$ _____

Trata de establecer una conjetura para los ángulos adyacentes.



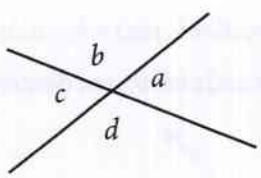
La suma de las medidas de los ángulos adyacentes es igual a ____________

En otras palabras, los ángulos adyacentes forman un ángulo________

Esta conjetura la aceptaremos como verdadera, por lo que podemos establecer la siguiente propiedad.

Propiedad de los ángulos adyacentes. Si dos ángulos son adyacentes, entonces la medida de los ángulos suman 180°

Con base en la figura completa las siguientes proposiciones.



$\angle a + \angle b =$ _____ $\angle c + \angle d =$ _____

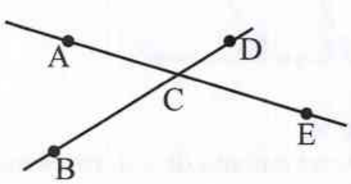
$\angle a + \angle d =$ _____ $\angle c + \angle b =$ _____

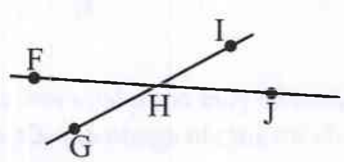
En la siguiente actividad explorarás a los ángulos opuestos por el vértice.

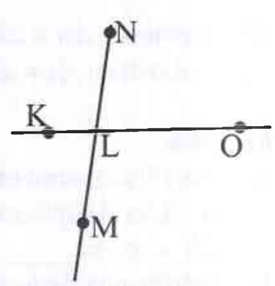
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 14

a) Considera los siguientes pares de rectas intersecantes:







b) Mide cuidadosamente cada uno de los ángulos.
c) Identifica la pareja de ángulos opuestos por el vértice con sus respectivas medidas.

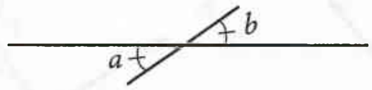
El $\angle DCE$ es opuesto por el vértice al $\angle ACB$, ambos miden ______
El $\angle ACD$ es opuesto por el vértice al $\angle BCE$, ambos miden ______
El $\angle FHI$ es opuesto por el vértice al $\angle GHJ$, ambos miden ______
El $\angle KLN$ es opuesto por el vértice al $\angle MLO$, ambos miden ______

d) Establece una conjetura para los ángulos opuestos por el vértice:____________________________.

Vamos a demostrar que tu conjetura es un teorema el cual se enuncia y demuestra a continuación:

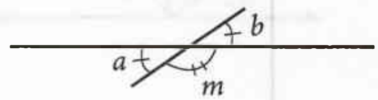
Teorema: Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Hipótesis: $\angle a$ y $\angle b$, son opuestos por el vértice.



Tesis: $\angle a = \angle b$

El $\angle m$ es un ***elemento auxiliar***



Razonamiento en forma de flujo:

$\angle a$ y $\angle b$, son opuestos por el vértice

$\angle a$ y $\angle m$, son adyacentes → $\angle a + \angle m = 180°$

$\angle b$ y $\angle m$, son adyacentes → $\angle b + \angle m = 180°$

→ $\angle a + \angle m = \angle b + \angle m$

↓

$\angle a + \cancel{\angle m} = \angle b + \cancel{\angle m}$ → $\angle a = \angle b$

Demostración de párrafo: Demuestra que $\angle a = \angle b$.

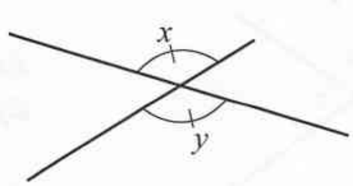
Como $\angle a$ y $\angle m$, son adyacentes $\angle a + \angle m = 180°$. Por la misma razón $\angle b + \angle m = 180°$. Por la propiedad transitiva de la igualdad se cumple que, $\angle a + \angle m = \angle b + \angle m$. Y aplicando la propiedad de sustracción de la igualdad da como resultado $\angle a = \angle b$.

Ahora, para comprobar que has comprendido esta demostración, realiza la siguiente actividad.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 15

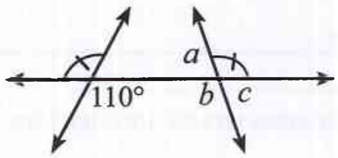
Utilizando la figura de la derecha, demuestra que $\angle x = \angle y$

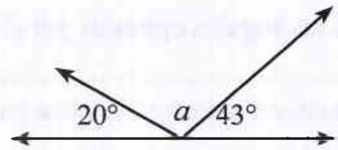


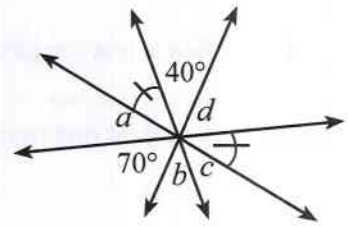
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1 y 5.1

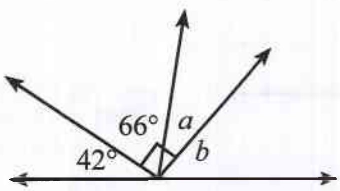
1.6 EJERCICIOS

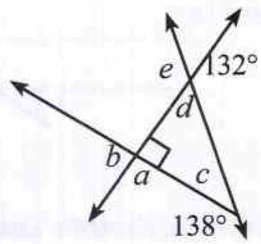
1. Agrega a tu diccionario los términos de esta lección, que consideres más relevantes.
En los ejercicios 2 - 9, encuentra cada ángulo marcado con una letra sin usar transportador.

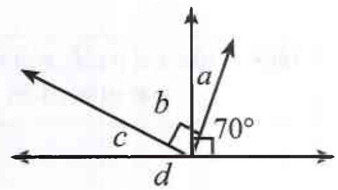
2.


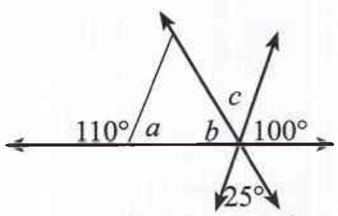
3.


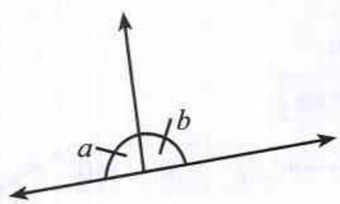
4.


5.


6.


7.


8.


9.


En los ejercicios 10-15, indicar si cada oración es verdadera siempre (S), algunas veces (A), o nunca (N). Debes plantear ejemplos y contraejemplos en cada caso.

10. ______ La suma de las medidas de dos ángulos agudos es igual a la medida de un ángulo obtuso.

11. ______ Si $\angle XAY$ y $\angle PAQ$ son opuestos por el vértice, entonces ya sea X, A, y P o X, A, y Q son colineales.

12. ______ La suma de las medidas de dos ángulos obtusos es igual a la medida de un ángulo obtuso.

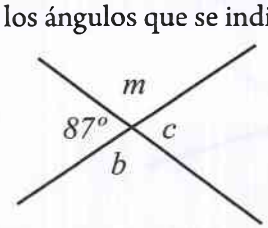
13. ______ La diferencia entre la medida del suplemento y el complemento de un ángulo es 90°.

14. ______ Si dos ángulos son adyacentes, entonces son suplementarios.

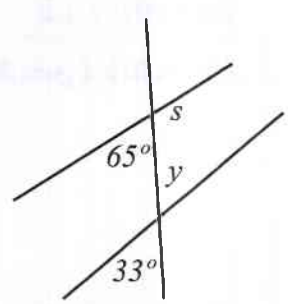
15. ______ Si una oración es verdadera, entonces la inversa es verdadera.

16. Calcular la medida de los ángulos que se indican:

$\angle m =$ _____
$\angle c =$ _____
$\angle b =$ _____



$\angle s =$ _____
$\angle y =$ _____

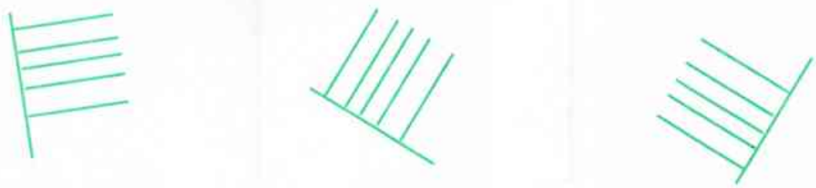


1.7 Descubrimiento y prueba en ángulos (2): Ángulos sobre rectas paralelas

Lee con atención los siguientes términos informales que te ayudarán a identificar y comprender las propiedades de los ángulos entre paralelas.

Una sierra es una figura formada por dos segmentos paralelos entre sí, conectados en uno de sus extremos por otro segmento.

Una escalera es una estructura formada por una recta y una familia de segmentos con origen en la recta, situados todos al mismo lado de la recta, paralelos entre sí.

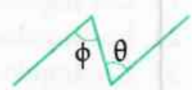


Para ayudarte a identificar las propiedades que cumplen los ángulos asociados con sierras y escaleras, realiza la siguiente actividad.

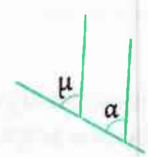
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 16

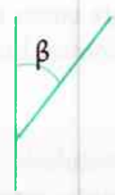
a) ¿Cómo se llaman los ángulos formados por una sierra? __________; los ángulos ϕ y θ se llaman _________



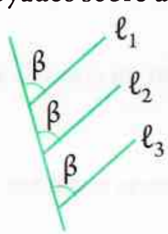
b) ¿Cómo se llaman los ángulos formados por una escalera? __________; los ángulos μ y α se llaman _________

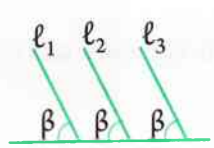


c) En cualquier cartón dibuja un ángulo parecido al ángulo β que se muestra:



- Recorta el ángulo a través de sus lados.
- Con la plantilla del ángulo que recortaste, dibuja varios ángulos congruentes apoyados sobre una recta.

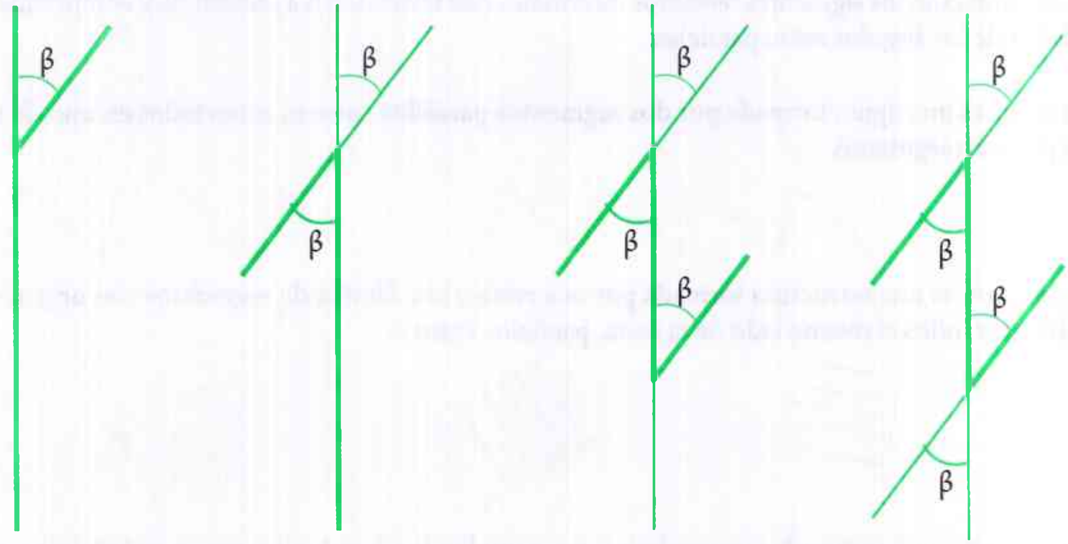




d) Ahora, prolonga tanto como puedas cada recta ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 ¿Qué observas? ____________________
De manera inductiva podemos concluir que las rectas señaladas son paralelas.

De otra manera, si formamos una escalera con un mismo ángulo, se forma un sistema de rectas paralelas cruzadas por una transversal. Además, en este sistema, se observa que los ángulos correspondientes son iguales.

e) Coloca la misma plantilla de tal manera que se formen las siguientes figuras.



Podemos concluir que: si formamos una sierra con un mismo ángulo, se forma un sistema de rectas paralelas cruzadas por una transversal. Además, en este sistema, se observa que los ángulos alternos internos son iguales. También, los ángulos alternos externos son iguales.

f) Usa tus hallazgos para completar las siguientes conjeturas:
Si dos rectas paralelas son cortadas por una trasversal, entonces:

1) Los ángulos correspondientes son ____________________.
2) Los ángulos alternos internos son ____________________.
3) Los ángulos alternos externos son ____________________.

A continuación argumentaremos de manera deductiva las conjeturas que se acaban de establecer. Para ello, debemos aceptar como válida una, cualesquiera de las tres conjeturas sobre rectas paralelas.

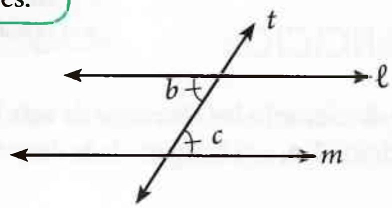
En este curso, aceptaremos como válido que los ***ángulos correspondientes entre paralelas son iguales.*** Seguiremos los pasos ya conocidos.

Postulado. Dos rectas paralelas cortadas por una transversal forman con ella ángulos correspondientes iguales.

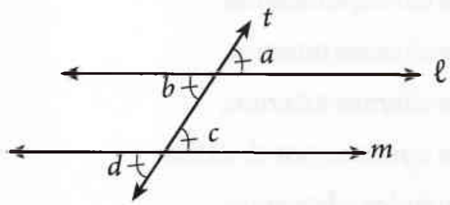
Una vez establecido este postulado, se pueden demostrar las conjeturas restantes. Vamos a demostrar la conjetura de los ángulos alternos internos.

Teorema: Dos rectas paralelas cortadas por una transversal forman con ella ángulos alternos internos iguales.

Hipótesis: la recta ℓ
es paralela a la recta m.
$\angle b$ y $\angle c$, son alternos internos.



Tesis:
$\angle b = \angle c$



El $\angle a$ es un ***elemento auxiliar.***

Razonamiento en forma de flujo:

$\angle b$ y $\angle c$, son alternos internos

Las rectas ***l* y *m*** son paralelas. → $\angle a = \angle c$ → $\angle b = \angle c$

$\angle a = \angle b$ → $\angle b = \angle c$

Demostración de párrafo: Demuestra que $\angle b = \angle c$.

Puesto que las rectas ***l* y *m*** son paralelas y son cortadas por la transversal t, y de acuerdo con el postulado de los ángulos correspondientes, $\angle a = \angle c$. Además, $\angle a = \angle b$ por ser opuestos por el vértice. Finalmente, por la propiedad transitiva de la igualdad podemos afirmar que $\angle b = \angle c$.

Ahora, para que consolides tus conocimientos, realiza la siguiente actividad.

Actividad 17

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

a) Demuestra los siguientes teoremas.

Teorema. Dos rectas paralelas cortadas por una transversal forman con ella ángulos alternos externos iguales.

Teorema: Los ángulos colaterales internos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal, son suplementarios.

Utilizando la proposición si-entonces, las propiedades de las rectas paralelas queda de manera general de la siguiente manera:

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entones los ángulos correspondientes son iguales, los ángulos alternos internos son iguales, y los ángulos alternos externos son iguales.

Si invertimos las partes de la proposición "*si*" y "*entonces*" de una proposición "*si-entonces*", se obtiene el inverso de la proposición. He aquí el inverso de las propiedades de las paralelas:

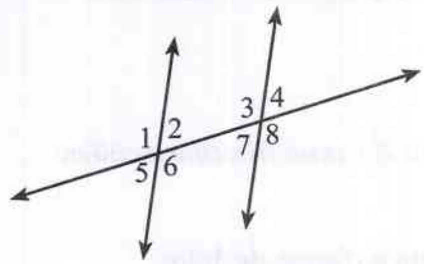
Si dos rectas son cortadas por una transversal para formar un par de ángulos correspondientes iguales, ángulos alternos internos iguales, o ángulos alternos externos iguales, entonces las rectas son paralelas.

1.7 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1 y 5.1

1. Agrega a tu diccionario los términos de esta lección, que consideres más relevantes.
   En los ejercicios 2-6, usa la figura de la derecha para encontrar un ejemplo de cada término.

2. Ángulos correspondientes.
3. Ángulos alternos internos.
4. Ángulos alternos externos.
5. Ángulos opuestos por el vértice.
6. Par de ángulos adyacentes.

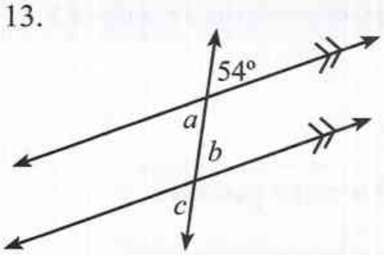


En los ejercicios 7-12, usa la figura anterior para indicar si cada oración es siempre (S), algunas veces (A), o nunca (N) verdadera.

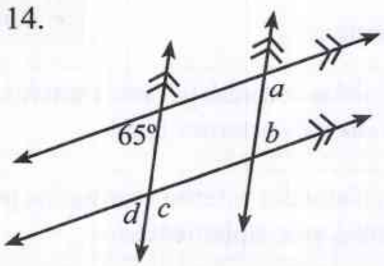
7. _______ $\angle 1 \cong \angle 3$
8. _______ $\angle 3 \cong \angle 8$
9. _______ $\angle 2$ y $\angle 6$ son suplementarios.
10. _______ $\angle 7$ y $\angle 8$ son suplementarios.
11. _______ $m\angle 1 \neq m\angle 6$
12. _______ $m\angle 5 = m\angle 4$

En los ejercicios 13-15, usa las propiedades de líneas paralelas para encontrar la medida de cada ángulo. Observación: marcas iguales tipo flechas sobre rectas que aparentan ser paralelas, nos indican que sí lo son.

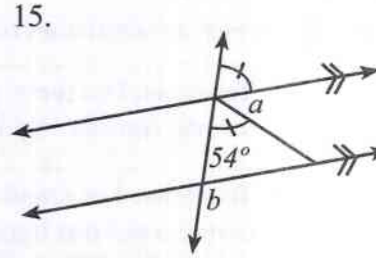
13.



14.

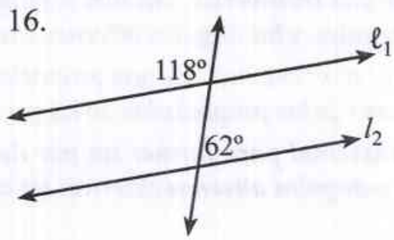


15.

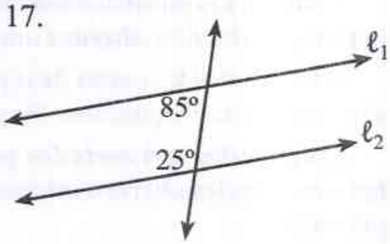


En los ejercicios 16 - 17, usa las propiedades de líneas paralelas para determinar si o no $\ell_1 \parallel \ell_2$

16.



17.



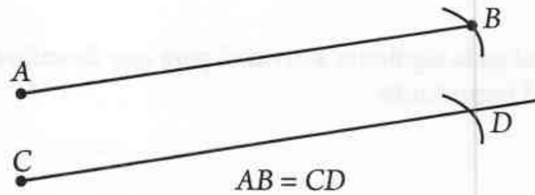
1.8 Construcciones geométricas

En geometría, construir una figura consiste en trazarla usando un compás y una regla no graduada. Es decir, cuando te pidan construir una figura, no debes usar herramientas de medición.

Sigue las siguientes instrucciones que explican cómo trazar un segmento igual a otro. Repite el proceso en tu cuaderno.

Procedimiento:

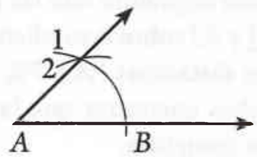
1. Dibujamos una semirrecta más larga que AB.
2. Con centro A, trazamos un arco y lo trasladamos al rayo dibujado. Si C es el extremo inicial del nuevo segmento, y D el punto de cruce en el arco y la semirrecta, tenemos que $AB = CD$.

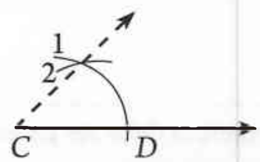


Ahora, trata de comprender el proceso de trazar un ángulo igual a otro usando una regla no graduada y compás. Repite el proceso en tu cuaderno.

Procedimiento:

1. Dibujamos una semirrecta más larga que $\overline{AB}$.
2. Con centro A, trazamos el arco 1 y lo trasladamos al rayo dibujado. Si C es el extremo inicial del nuevo rayo, y D el punto de cruce del arco y la semirrecta, tenemos que $AB = CD$.
3. Con centro en B, trazamos el arco 2 y lo trasladamos al lado dibujado.

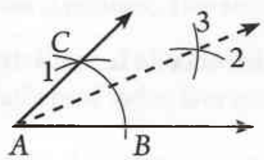




A continuación aprenderás a construir la bisectriz de un ángulo. Repite todo el proceso.

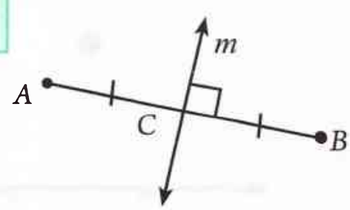
Procedimiento:

1. Con centro en el vértice A del ángulo, se traza el arco l.
2. Con centro *en* B *y* C, y con la misma abertura del compás, se trazan los arcos 2 y 3.



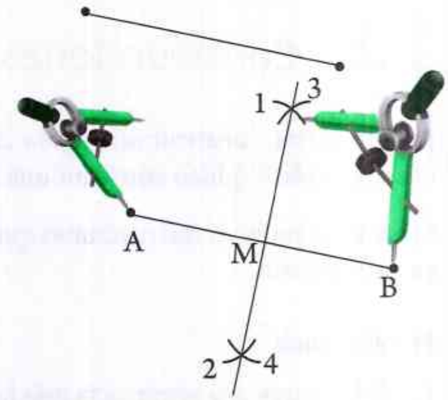
Mediatriz de un segmento La mediatriz de un segmento es una recta que pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular al segmento.

La recta m es la mediatriz de $\overline{AB}$.
Si m es mediatriz de $\overline{AB}$, entonces m es perpendicular a AB y C es punto medio de $\overline{AB}$.



Para trazar la mediatriz de un segmento, sigue el siguiente procedimiento.

1. Con una abertura del compás mayor que la mitad del segmento y con centro en A, se trazan los arcos 1 y 2.
2. Con la misma abertura del compás y con centro en *B*, se trazan los arcos 3 y 4.
3. Al trazar la mediatriz, se obtiene el punto medio M del segmento.

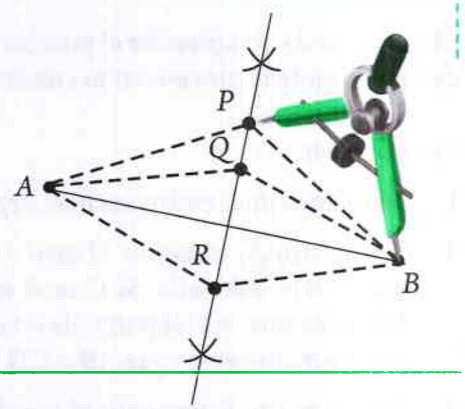


Realiza la siguiente actividad para que descubras una propiedad importante.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 18

Rotula los extremos del segmento con las letras *A* y *B*. Coloca tres puntos (*P*, *Q* y *R*) sobre la mediatriz y usa tu compás para comparar las distancias *PA* y *PB*, *QA* y *QB*, *AR* y *RB*. En cada caso, debes encontrar que las distancias son iguales. Establece una conjetura.



Tu conjetura debe ser parecida a la siguiente.

Conjetura de la mediatriz. Si un punto está sobre la mediatriz de un segmento, entonces es ***equidistante*** con respecto a los extremos.

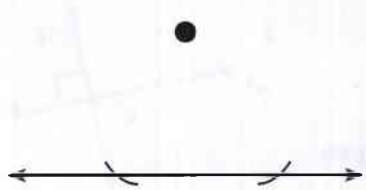
Aceptaremos como válida esta conjetura, así como su inversa, a saber:

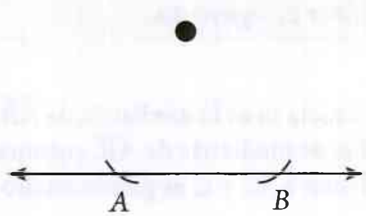
Conjetura de la inversa de la mediatriz. Si un punto es equidistante a los extremos de un segmento, entonces está sobre la mediatriz del segmento.

Enseguida, se explica cómo construir la perpendicular a una recta desde un punto que no está sobre la recta.

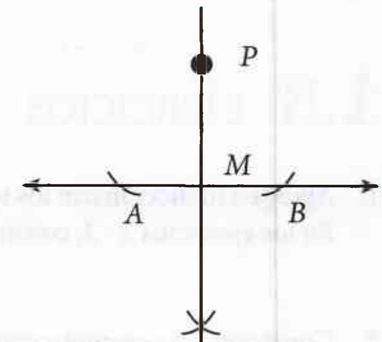
Procedimiento:

1. Dibuja una recta y un punto *P*, que no esté sobre la recta. Con la punta del compás apoyada en el punto *P*, traza dos arcos sobre la recta. Rotula los puntos de intersección con *A* y *B*.





Observa que $PA = PB$, así que el punto P está sobre la mediatriz de $\overline{AB}$. Usa la construcción que aprendiste en la actividad 3 para construir la mediatriz de $\overline{AB}$. Rotula el punto de intersección como M. De esta manera, se ha construido una perpendicular a una recta desde un punto que no está sobre la recta.

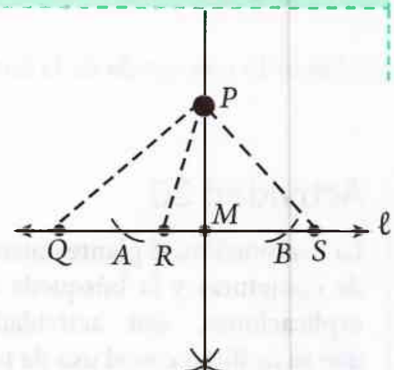


Utilizando el concepto de perpendicularidad, estableceremos dos propiedades importantes. Realiza la siguiente actividad.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 19

En la figura anterior elige cualesquiera tres puntos sobre $\overleftrightarrow{AB}$ y rotúlalos como Q, R, y S. Mide $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{PS}$ y $\overline{PM}$. ¿Qué distancia es la más corta?



Tus observaciones deben conducir a la siguiente conjetura.

Conjetura de la distancia más corta. La distancia más corta de un punto a una recta, se mide a lo largo del segmento perpendicular, desde el punto a la recta.

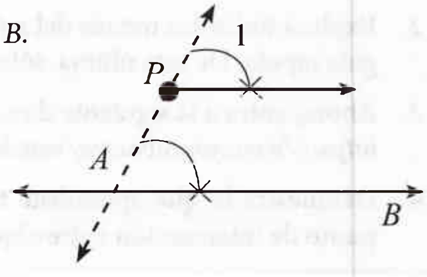
Asimismo, se plantea la siguiente definición.

La distancia de un punto a una recta, es la longitud del segmento perpendicular que va del punto a la recta. Así, en la figura anterior, la distancia del punto ***P*** a la recta ***l*** es ***PM***.

Por último, aprenderás a trazar una paralela a una recta.

Procedimiento:
1. Por el punto P se traza la recta PA que corte a la recta dada en B.
2. Se traza en P el $\angle 1$ igual al PAB.

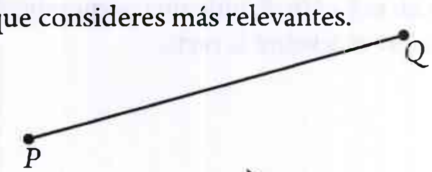
Por el criterio del paralelismo las rectas son paralelas.



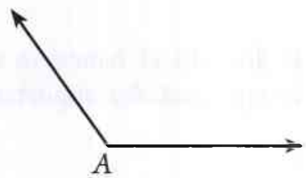
1.8 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1 y 5.1

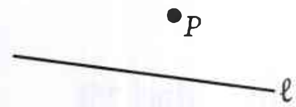
1. Agrega a tu diccionario los términos de esta lección, que consideres más relevantes.
   En los ejercicios 2 - 3, considera el segmento PQ.



2. Construye un segmento congruente con PQ.
3. Al semento trazado en 2, trázale su mediatriz.
   En los ejercicios 4 - 5, usa el ángulo A de la derecha.



4. Con regla y compás, construye un ángulo congruente con $\angle A$.
5. Traza la bisectriz del $\angle A$.
   En los ejercicios 6-7, considera la recta ℓ y el punto P.
6. Con regla y compás, traza una perpendicular a la recta ℓ que pase por P.
7. Con regla y compás, traza una paralela a la recta ℓ que pase por P.



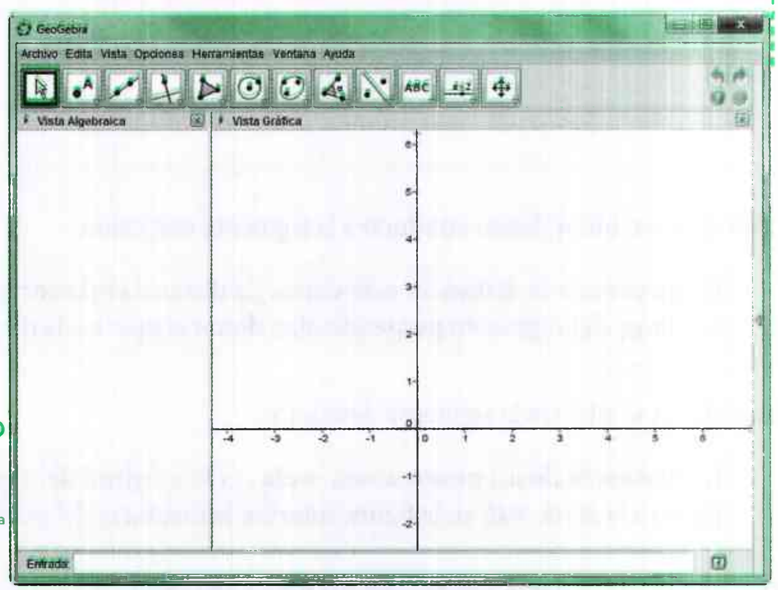
¡Indagando con ayuda de la tecnología!

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de exploración con tecnología
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.6

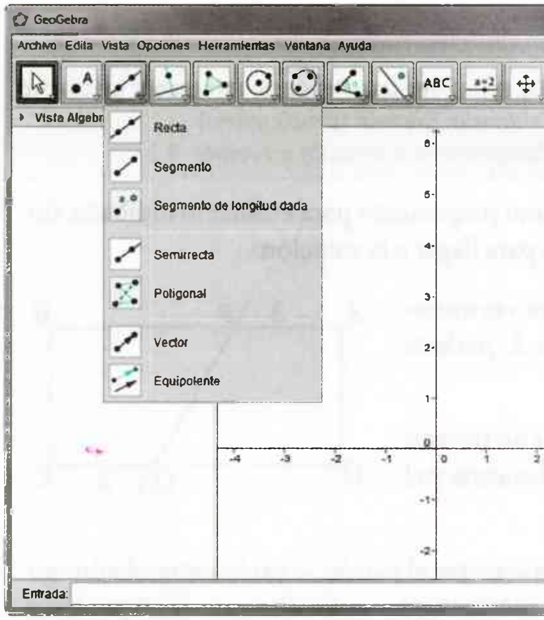
Actividad 20

La exploración, el planteamiento de conjeturas y la búsqueda de explicaciones, son actividades que se facilitan con el uso de tecnología. Geogebra, es el nombre de un software libre, que te será de mucha ayuda en tu trabajo con objetos geométricos. Tu primera actividad con tecnología, consistirá en lo siguiente:

Utiliza GeoGebra



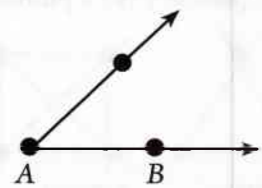
1. Descarga el *software* geogebra; puedes hacerlo desde la dirección: *http://www.geogebra.org/cms/es/download/*
2. Explora todos los menús del *software.* Haz clic en ayuda, luego en tutoriales y, por último, clic en guía rápida. De esta última, sólo revisa por el momento, las tres primeras páginas.
3. Ahora, entra a la siguiente dirección electrónica, que corresponde a un video sobre el geogebra. *https://www.youtube.com/watch?v=uAvGn6Toh6g*
4. Demuestra lo que aprendiste trazando segmentos , rectas, semirrectas, ángulos. Determina el punto de intersección entre objetos, determina longitud de segmentos y medida de ángulos.



Construir con Geogebra, un segmento congruente a uno dado.

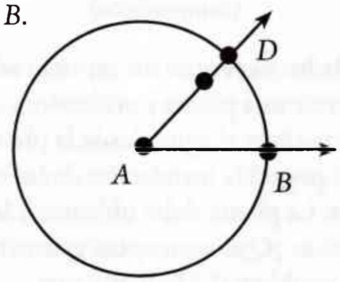
1. Usa la opción segmento y traza un segmento.
2. Usa la opción semirrecta y traza una semirrecta.
3. Usa la opción compás, da clic de manera sucesiva en cada uno de los extremos del segmento. Sin soltar el ratón, arrastra el círculo (hace las veces de compás) y coloca su centro en el extremo inicial de la semirrecta y da clic.
4. Usa la opción intersección, da clic en el círculo y en la semirrecta. Aparecerá el segundo extremo del nuevo segmento que es una copia del segmento dado.
5. Verifica que los segmentos son iguales usando la opción distancia.

Construir con geogebra, un ángulo congruente a uno dado.

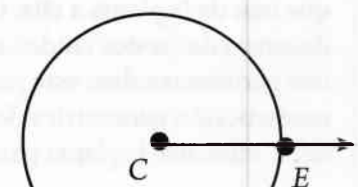


1. Usa la opción semirrecta y construye un ángulo cualquiera (sólo etiqueta los puntos A y B).
2. Usa la opción semirrecta y traza una tercer semirrecta que inicie en C.

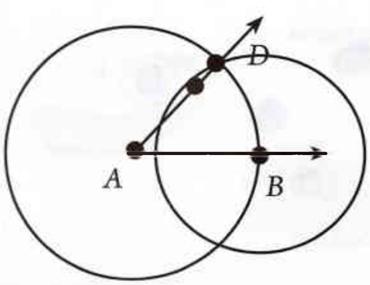
3. Usa la opción circunferencia, clic en A y en B.
4. Usa la opción intersección para encontrar el punto D.

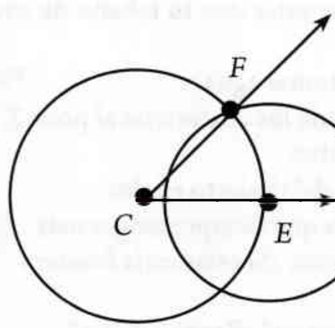


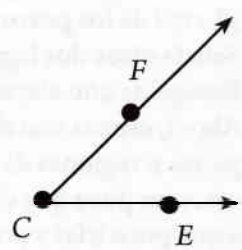
5. Usa la opción compás, da clic en A y en B y trasládolo a la semirrecta dando clic en C.
6. Usa la opción intersección para encontrar el punto E.



7. Usa la opción compás, clic en B y D y trasládalo dando clic en E.







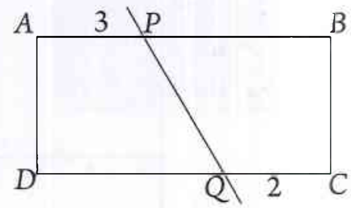
8. Encuentra la intersección F, y traza una semirrecta por C y F.
9. Oculta los objetos de tal manera que sólo quede el ángulo igual al ángulo dado.

EXAMEN 1 (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 4.3 y 2.

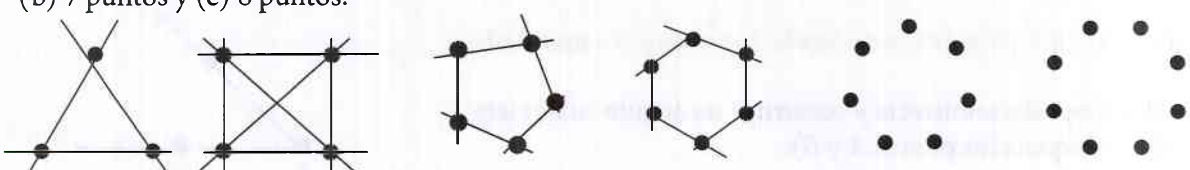
INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. Una recta parte al rectángulo $ABCD$ como se muestra. Si el segmento AP mide 3 y el segmento QC mide 2, ¿cuánto vale la longitud de DQ menos la longitud de PB?



Problema 2. ¿cuántos postes se necesitan para cercar un terreno rectangular si entre los postes debe haber 2 metros de distancia y el terreno mide 6 metros por 9 metros?

Problema 3. De acuerdo a la siguiente ilustración, encuentra el patrón seguido entre el número de puntos y el número de rectas formadas y determina cuántas rectas se forman con (a) 6 puntos y (b) 7 puntos y (c) 8 puntos.



3 puntos 3 rectas | 4 puntos 6 rectas | 5 puntos 10 rectas (compruébalo) | 6 puntos ___?___ rectas | 7 puntos ___?___ rectas | 8 puntos ___?___ rectas

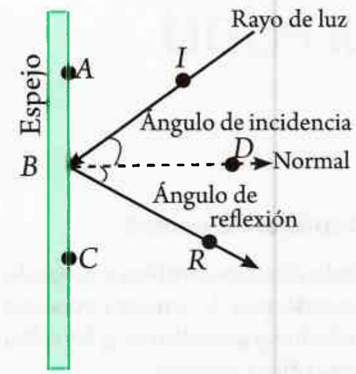
Problema 4. Dos ciudades necesitan un servicio adicional de agua. Se decidió construir una planta purificadora de agua junto a un río cercano y canalizar el agua desde la planta hasta cada ciudad. Cada ciudad pagará la instalación de las tuberías que irán de la planta a ella. La planta debe ubicarse a la misma distancia de las dos ciudades. ¿Qué conceptos geométricos nos permite resolver este problema? Mediante una construcción geométrica determínese el punto en que debe colocarse la planta para satisfacer estos objetivos.

Problema 5. En el desierto: En la figura se muestra parte de un mapa de un desierto. Hay dos pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas este mapa contigo.

a) ¿A cuál de los pozos irías a tomar agua?
b) Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro.
c) Ahora, esboza una división del desierto en dos partes o regiones de manera que siempre tengas más cerca un pozo que el otro pozo. ¿Si estás en la frontera a qué pozo irías y por qué?
d) ¿Qué clase de línea es la frontera? ¿Recta o curva?
e) Encuentra un procedimiento para dibujar esta línea. Describe los pasos de este procedimiento.

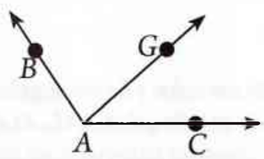
Problema 6. Si se dibujan un círculo y un rectángulo en la misma hoja, ¿cuál es el máximo número de puntos comunes que pueden tener?

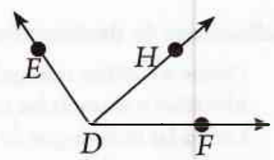
Problema 7. La luz tiene una propiedad muy importante, la propiedad de reflexión, es decir, que si un rayo de luz choca con una superficie que refleje las imágenes (por ejemplo un espejo), se refleja formando el mismo ángulo con el que llegó. Se llama *ángulo de incidencia* el formado por el rayo incidente y la normal (semirrecta perpendicular a la superficie de choque), y, se llama *ángulo de reflexión* al formado por el rayo reflejado y la normal. En la figura de la derecha, si $\angle ABI = 49°$, determina la medida del ángulo de reflexión $\angle DBR$.



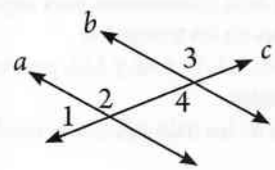
Problema 8. Auxiliado por un razonamiento en forma de flujo, escribe en cada caso, una demostración de párrafo.

a) Hipótesis: $\angle BAC = \angle EDF$
AG bisecta $\angle BAC$
DH bisecta $\angle EDF$
Demostrar: $\angle GAC = \angle HDF$





b) Hipótesis: a, b y c son rectas,
$\angle 1 + \angle 3 = 180°$
Demostrar: $\angle 2 = \angle 4$

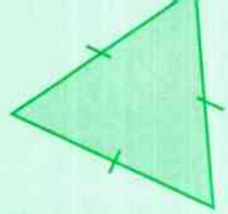


Saber ser: Puntualidad y actitud.

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Autoevaluación

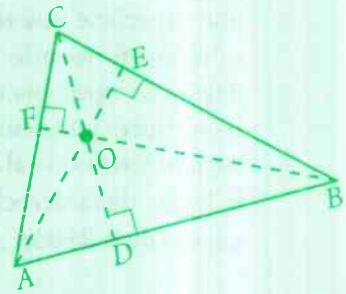
INSTRUCCIONES: A continuación valora tu desempeño colocando una √ en la puntuación que refleja tu desempeño según los siguientes indicadores que apuntan al logro de competencias genéricas:

	Desempeño		
	Siempre (3)	Algunas veces (2)	Nunca (1)
Llegué puntualmente a las clases.			
Mostré un comportamiento aceptable en el grupo.			
Mostré capacidad de trabajo independiente.			
Realicé las actividades establecidas.			
Mantuve una actitud de respeto y tolerancia hacia el trabajo en equipo.			
Aporté puntos de vista con apertura y consideré los de mis compañeros de manera reflexiva.			
Entregué cada uno de los trabajos encomendados en fechas acordadas.			



2 unidad

Triángulos: Propiedades y criterios de congruencia



Propósito de unidad

Analiza las características y propiedades de los triángulos, incluyendo las relaciones de congruencia, para desarrollar y presentar argumentos inductivos y deductivos sobre estas ideas y relaciones geométricas, y, las aplica en diversos contextos teóricos o prácticos de una manera crítica y reflexiva.

Indicadores de desempeño

- Define y clasifica triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos.
- Identifica y enuncia los criterios de congruencia de triángulos, *LAL, ALA , AAL* y *LLL*.
- Utiliza las tecnologías de la información, para construir triángulos, así como las rectas y puntos notables.
- Utiliza las tecnologías de la información, para explorar las propiedades de los triángulos y los criterios de congruencia.
- Justifica las propiedades de los triángulos.
- Aplica los criterios *LAL, ALA, AAL* y *LLL* para verificar congruencia entre triángulos y entre partes correspondientes de triángulos congruentes.
- Aplica las propiedades de los triángulos en la resolución de problemas geométricos.

Competencias disciplinares a evaluar

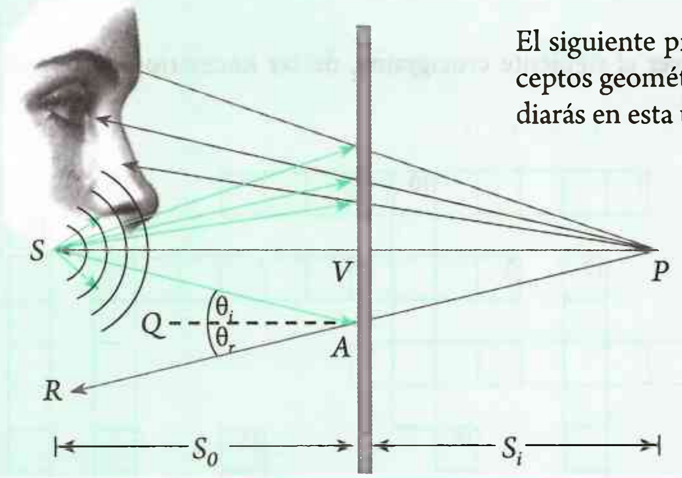
2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema , con métodos analíticos o variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Atributos de Competencias genéricas a evaluar.

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante diversos sistemas de representación simbólica.
4.3 Identifica y evalúa las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.
8.3 Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con los conocimientos y habilidades que posee.

Actividad preliminar

¿Por qué es importante estudiar esta unidad?



El siguiente problema muestra la utilización de varios conceptos geométricos, algunos ya estudiados y otros que estudiarás en esta unidad. Analízalo atentamente.

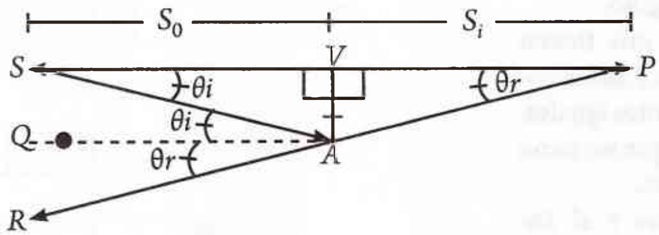
Problema. A partir de la figura, demuestra que, en un espejo plano, la imagen se ubica a la misma distancia del objeto al espejo, pero detrás de éste; esto es, la distancia del objeto *So* es igual a la distancia de la imagen *Si*. Se debe tener en cuenta que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, es decir: $\theta i = \theta r$.

Con tus conocimientos previos, resuelve la siguiente actividad:

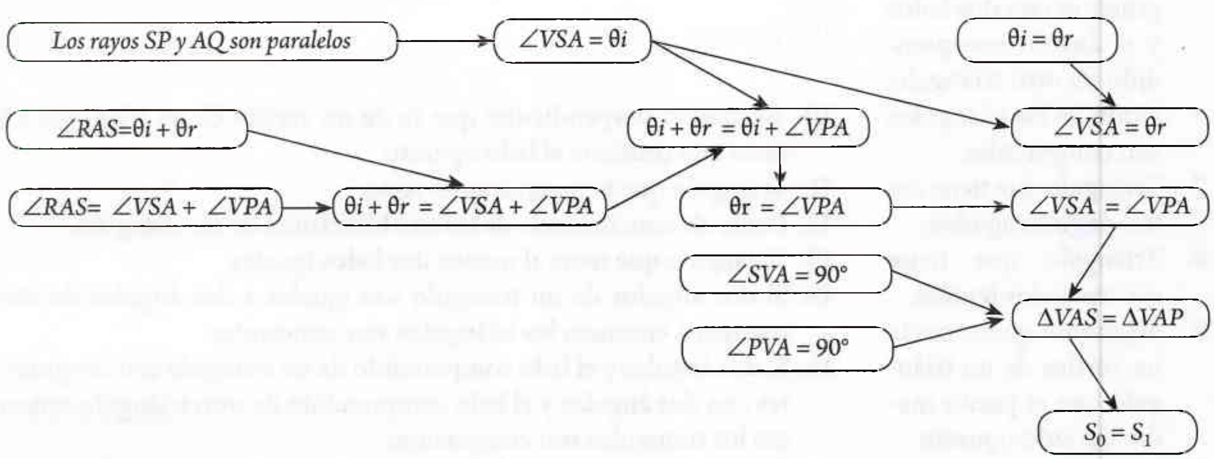
Actividad 1

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Autoevaluación

a) Primero analiza detenidamente el razonamiento seguido para demostrar que $\boldsymbol{S_0 = S_i}$ que se muestra en un esquema de flujo.

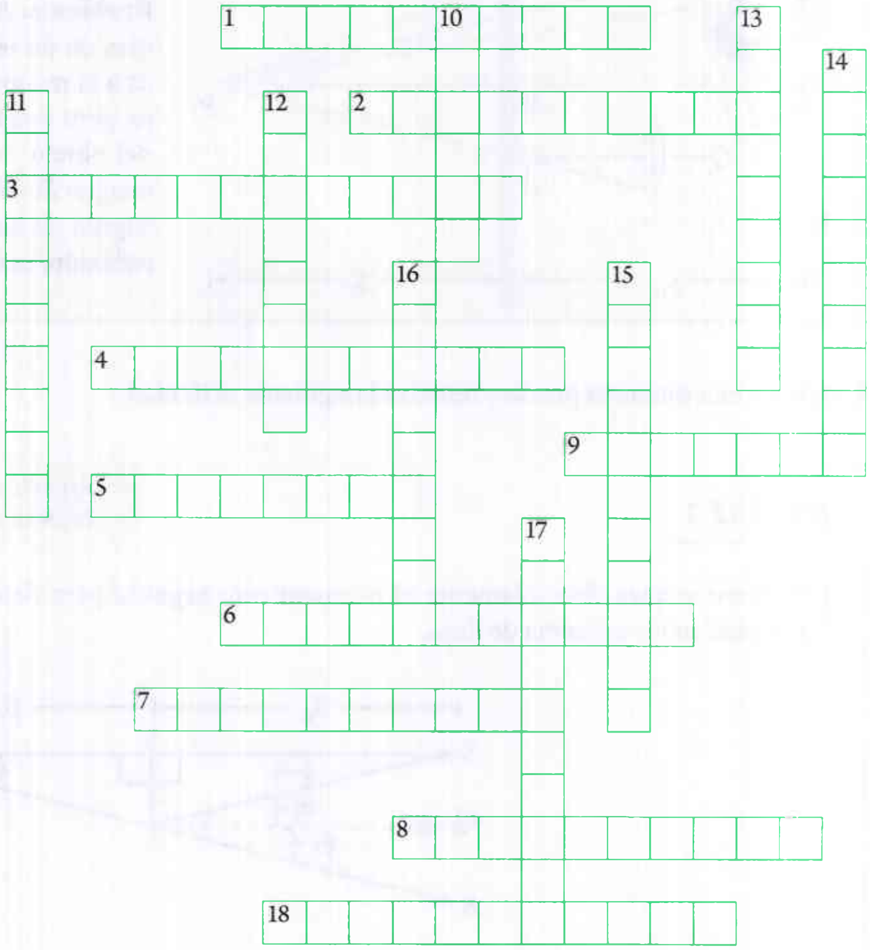


Razonamiento en forma de flujo:



b) ¿Qué tanto recuerdas de lo que estudiarás en esta unidad?

Utiliza tus conocimientos previos para resolver el siguiente crucigrama, de ser necesario consulta el material de esta unidad y revisa tus respuestas.



Horizontales

1. Triángulos cuyos ángulos respectivos son iguales, y sus lados homólogos proporcionales.
2. Punto de concurrencia de las tres alturas de un triángulo.
3. Punto de concurrencia de las tres mediatrices de un triángulo.
4. Triángulos que tienen sus ángulos y lados correspondientes iguales.
5. Triángulo que no tiene lados iguales.
6. Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
7. Triángulo que tiene sus tres ángulos agudos.
8. Triángulo que tiene sus tres lados iguales.
9. Segmento que conecta un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto.
18. Triángulo que tiene un ángulo obtuso.

Verticales

10. Segmento perpendicular que va de un vértice de un triángulo a la recta que contiene el lado opuesto.
11. Triángulo que tiene un ángulo recto.
12. Punto de concurrencia de las tres bisectrices de un triángulo.
13. Triángulo que tiene al menos dos lados iguales.
14. Si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.
15. Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
16. Punto de concurrencia de las tres medianas de un triángulo.
17. Es la igualdad entre dos razones.

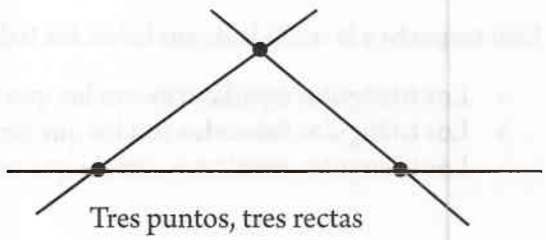
2.1 Clasificación y construcción de triángulos

Clasificación, rectas y puntos notables de triángulos.

Lee con atención:

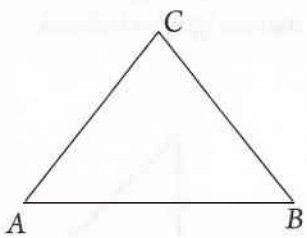
Por un punto A pasan una infinidad de rectas. Dados dos puntos A y B, determinan una recta y dados tres puntos A, B y C, éstos determinan una o tres rectas: Recordemos que si los tres puntos están sobre una recta los llamamos puntos colineales. Si los tres puntos no son colineales, forman un **triángulo** con las tres rectas que éstos determinan.

Tres puntos, una recta

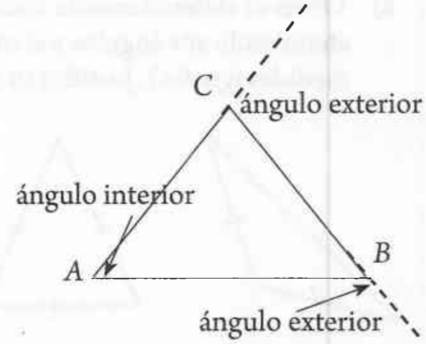


Tres puntos, tres rectas

Los segmentos de recta determinados por los puntos de intersección se llaman **lados del triángulo** y los vértices de los ángulos formados por estos segmentos son los **vértices del triángulo.** Si estos vértices se denominan A, B y C, el triángulo se simboliza como ΔABC.



Lados	Ángulos	Vértices
$\overline{AB}$	$\angle A$	A
$\overline{AC}$	$\angle B$	B
$\overline{BC}$	$\angle C$	C



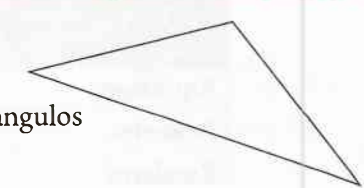
Los ángulos A, B y C son ángulos interiores. Los ángulos suplementarios a éstos, se llaman **ángulos exteriores**.

Un ángulo exterior es aquel formado por un lado del triángulo y la prolongación de otro lado.

Actividad 2

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

a) En el triángulo de la derecha localiza los vértices y los lados.



b) En el triángulo anterior, marca los ángulos interiores y tres ángulos exteriores. Utiliza un mismo color para cada tipo de ángulo.

Clasificación de triángulos

En tus estudios de primaria y secundaria, seguramente aprendiste a clasificar triángulos. A continuación recordarás estos aspectos.
Los triángulos se clasifican por sus ángulos en acutángulos, rectángulos y obtusángulos.

- Los triángulos **acutángulos** son los que tienen sus tres ángulos agudos.
- Los triángulos **rectángulos** son los que tienen un ángulo recto.
- Los triángulos **obtusángulos** son los que tienen un ángulo obtuso.

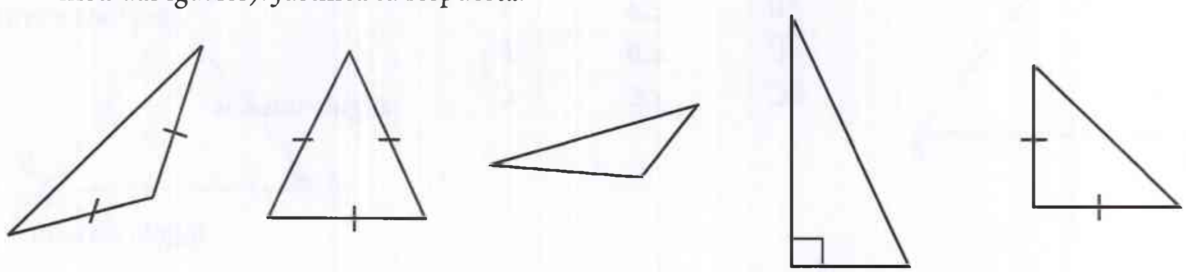
Con respecto a la medida de sus lados, los triángulos se clasifican en equiláteros, isósceles y escalenos.

- Los triángulos **equiláteros** son los que tienen sus tres lados iguales entre sí.
- Los triángulos **isósceles** son los que tienen al menos dos lados iguales entre sí.
- Los triángulos **escalenos** son los que no tienen lados iguales entre sí.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 3

a) Observa detenidamente cada uno de los siguientes triángulos y asígnales dos nombres: uno atendiendo sus ángulos y el otro atendiendo sus lados (recuerda que las marcas iguales indican medidas iguales). Justifica tu respuesta.



Isósceles ______ ______ ______ ______
Obtusángulo ______ ______ ______ ______

Completa el cuadro siguiente escribiendo «SÍ» cuando los triángulos cumplen simultáneamente las propiedades indicadas y «NO» en caso contrario; utiliza las siguientes preguntas para orientarte en el llenado del cuadro.

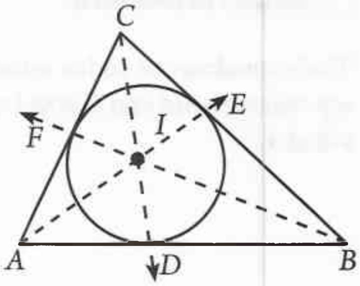
- ¿Los triángulos equiláteros pueden ser acutángulos? ¿Y rectángulos? ¿Y obtusángulos?
- ¿Los triángulos isósceles pueden ser acutángulos? ¿Y rectángulos? ¿Y obtusángulos?
- ¿Los triángulos escalenos pueden ser acutángulos? ¿Y rectángulos? ¿Y obtusángulos?

Ángulos / Lados	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Equilátero			
Isósceles			
Escaleno			

Rectas y puntos notables de triángulos

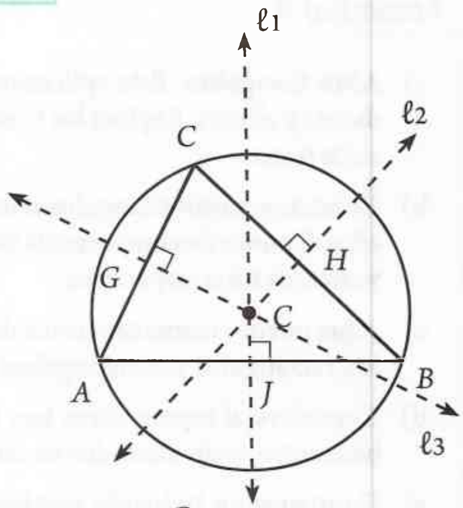
En la sección 1.3, se definió la bisectriz de un ángulo, y en la 1.8 mediatriz de un segmento. Para cada triángulo, pueden trazarse las bisectrices de cada uno de sus ángulos; asimismo, para cada segmento se pueden construir sus mediatrices. Además de estas rectas, en un triángulo se pueden trazar las denominadas alturas y las medianas. En tus estudios de primaria y secundaria, sabes de la importancia de la altura de un triángulo para calcular su área, pero además, todos estos elementos de los triángulos, son de interés por las propiedades que tienen sus puntos de intersección. En esta lección estudiarás estas cuestiones.

En la figura de la derecha, $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}$ y $\overrightarrow{CD}$ son las bisectrices de $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ respectivamente.



Propiedad de las bisectrices: El punto donde concurren las bisectrices de los ángulos de un triángulo se llama **incentro,** y es el centro del círculo inscrito en el triángulo. En la figura anterior, el punto I es el incentro del triángulo ABC. Cada punto de la bisectriz equidista de cada lado del ángulo; esto es, $IF = IE$, $IF = ID$, $IE = ID$.

En la siguiente figura a la derecha, ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3, son las mediatrices de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

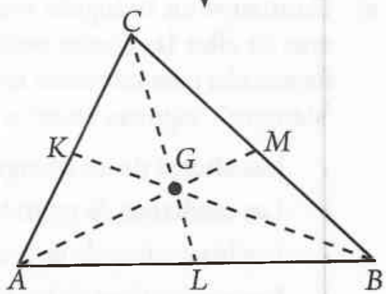


Propiedad de las mediatrices: El punto donde concurren las mediatrices de los lados de un triángulo se llama **circuncentro,** y es el centro del círculo circunscrito al triángulo. En esta figura, el punto C es el circuncentro del triángulo ABC.

A continuación, se definirán dos términos más: medianas y alturas de un triángulo.

Mediana de un triángulo es un segmento que conecta un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto de dicho vértice.

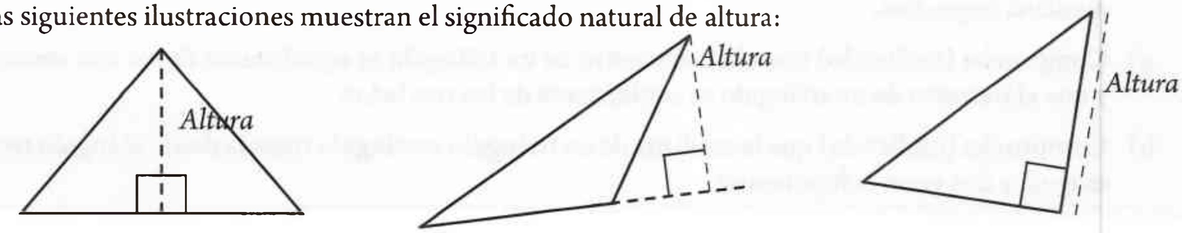
En el triángulo de la derecha, $\overline{AM}$, $\overline{BK}$ y $\overline{CL}$ son las medianas del ΔABC.



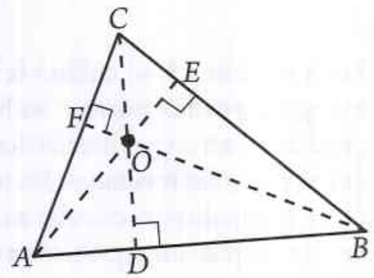
Propiedad de las medianas: El punto donde concurren las medianas se denomina **baricentro** o **centroide.** Este punto es el centro de gravedad del triángulo.

Altura de un triángulo es un segmento que va desde uno de sus vértices, perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto a dicho vértice.

Las siguientes ilustraciones muestran el significado natural de altura:



Sin embargo, por definición de altura, a cada vértice le corresponde una altura, tal y como se observa en la siguiente figura:



En la figura, cada uno de los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$, salen de un vértice y son perpendiculares al lado opuesto a dicho vértice. Por tanto los tres segmentos son alturas.

Las alturas de un triángulo se intersecan en un punto O llamado **ortocentro.**

Tradicionalmente, todos estos trazos se hacían con regla y compás. Sin embargo, hacerlo con tecnología específicamente con Geogebra, representa una gran ventaja. Para que compruebes ésto, realiza la actividad 4.

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de exploración con tecnología
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.6

Actividad 4

a) **Abre Geogebra.** Esta aplicación permite trazar de manera rápida bisectrices, mediatrices, medianas y alturas. Explora los iconos de Geogebra y localiza los botones con los que puedes hacer estos trazos.

b) Construye varios triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos; determina en cada uno de ellos el punto de concurrencia de sus bisectrices y de sus mediatrices, y traza los círculos inscritos y circunscritos respectivos.

c) ¿Qué puedes comentar acerca de la posición del incentro y circuncentro en triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos?

d) Construye al menos otros tres triángulos y comprueba que el circuncentro, el ortocentro y el baricentro están alineados en una recta. Esta recta se llama recta de Euler.

e) Construye un triángulo acutángulo, un triángulo obtusángulo y uno rectángulo; traza en cada uno de ellos las cuatro rectas notables y sus respectivos puntos de intersección; utiliza esta información para contestar las siguientes cuestiones. Llena los espacios en blanco con las palabras "siempre", "algunas veces" o "nunca" según correspondan:

- Las alturas de un triángulo ________ se intersecan en el interior del triángulo.
- Las medianas de un triángulo ________ se intersecan en el exterior del triángulo.
- Las bisectrices de un triángulo ________ se intersecan en el interior del triángulo.
- Las mediatrices de los lados de un triángulo ________ se intersecan en el interior del triángulo.

f) Comprueba (midiendo) que la distancia de cada vértice del triángulo al baricentro, es 2/3 de la mediana respectiva.

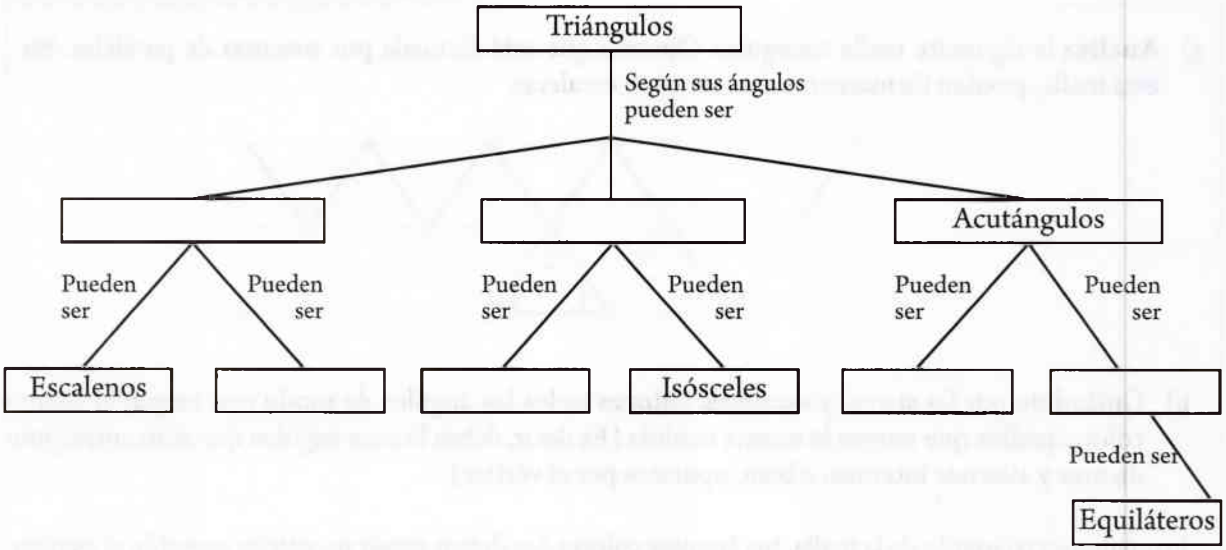
g) Comprueba (midiendo) que el circuncentro de un triángulo es equidistante de los tres vértices, y que el incentro de un triángulo es equidistante de los tres lados.

h) Comprueba (midiendo) que la mediana de un triángulo rectángulo trazada desde el ángulo recto es igual a dos veces la hipotenusa.

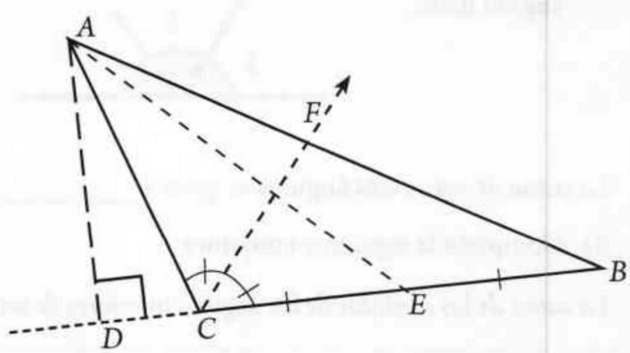
2.1 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1, 6.4 y 8.

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.
2. Crea un diagrama de Venn para mostrar las relaciones entre los triángulos, triángulos isósceles y triángulos trectángulos.
3. Completa el siguiente diagrama que nos muestra que un triángulo puede estar en más de una categoría. Utiliza tus resultados de la actividad 3.



4. El diagrama anterior establece que un triángulo isósceles puede ser equilátero. ¿Por qué es cierto ésto? ____________________________________
5. Un carpintero, ha construido una mesa circular. Para colocar la base de apoyo, necesita localizar el centro de la mesa. ¿Cómo proceder?
6. Completa cada oración escribiendo según corresponda: incentro, circuncentro, ortocentro, o centroide.
   a) Es la intersección de las alturas de un triángulo ________________
   b) Es la intersección de las medianas de un triángulo ______________
   c) Es la intersección de las bisectrices de un triángulo _____________
   d) Es la intersección de las mediatrices de un triángulo ____________
7. Identifica las partes del ΔABC:
   a) Mediana ______
   b) Altura ________
   c) Bisectriz ______



2.2 Propiedades de los triángulos (1): ángulos interiores

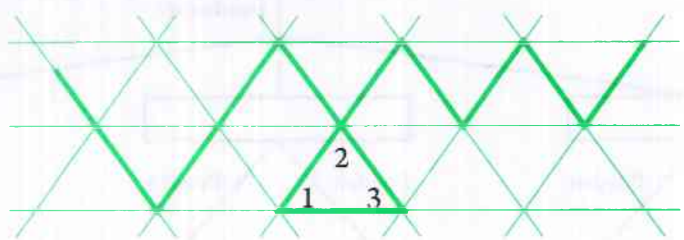
Angulos interiores de un triángulo

Empezarás esta sección realizando la siguiente actividad:

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

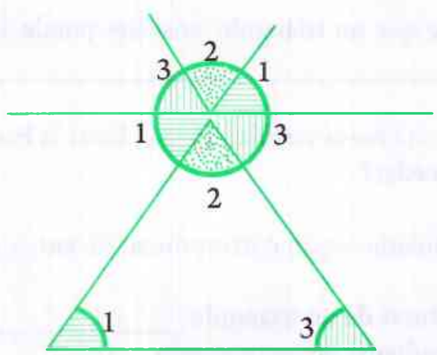
Actividad 5

a) **Analiza** la siguiente malla triangular. Observa que está formada por sistemas de paralelas. En esta malla, pueden formarse muchas sierras y escaleras.

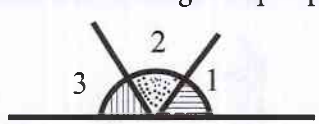


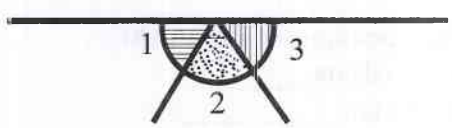
b) Guiándote por las sierras y escaleras, **colorea** todos los ángulos de modo que tengan el mismo color aquellos que tengan la misma medida (Es decir, debes buscar ángulos que sean correspondientes y alternos internos, o bien, opuestos por el vértice).

En cualquier triángulo de la malla, tus ángulos coloreados deben seguir un patrón parecido al siguiente:



c) Observa el vértice superior del triángulo. Puede verse que las medidas de los tres ángulos interiores del triángulo, coinciden con ángulos que quedan colocados en una recta. Es decir, forman un ángulo llano.





La suma de estos tres ángulos es igual a ____________________

d) Completa la siguiente conjetura:

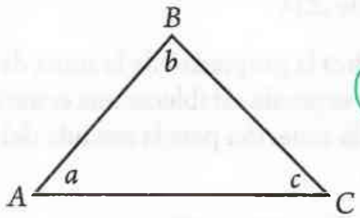
La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es ______

Ahora, **estudia** la justificación deductiva de esta conjetura. Observa, que hemos agregado una **recta auxiliar** (Una recta auxiliar, es una recta que se agrega a un diagrama que ayuda en una demostración. Estas rectas se muestran en líneas interrumpidas).

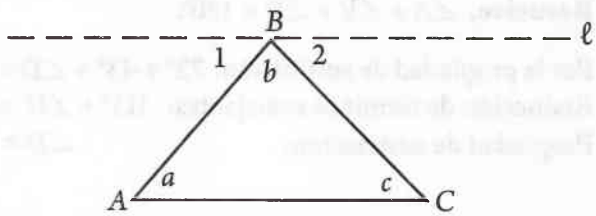
Teorema. La suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°

Hipótesis: $\angle a$, $\angle b$ y $\angle c$, son ángulos interiores del ΔABC.

Tesis: $\angle a + \angle b + \angle c = 180°$



La recta $\ell \parallel \overline{AC}$, y los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ son elementos auxiliares.



Razonamiento en forma de flujo:

$\angle a$, $\angle b$ y $\angle b$, son ángulos interiores de un triángulo.

$\ell \parallel \overline{AC}$

$\angle 1 = \angle a$

$\angle 2 = \angle c$

$\angle 1 + \angle b + \angle 2 = 180°$

$\angle a + \angle b + \angle c = 180°$

Demostración de párrafo: Demuestra que $\angle a + \angle b + \angle c = 180°$.

La construcción de $\ell \parallel \overline{AC}$, permite asegurar que $\angle 1 + \angle b + \angle 2 = 180°$, pues forman un ángulo llano; esta misma recta auxiliar garantiza que $\angle 1 = \angle a$ y que $\angle 2 = \angle c$, por tratarse en ambos casos, de ángulos alternos internos entre paralelas. Considerando estas afirmaciones y la propiedad de sustitución de la igualdad, concluimos que $\angle a + \angle b + \angle c = 180°$.

Para que consolides tu comprensión sobre este teorema, realiza la siguiente actividad:

Actividad 6

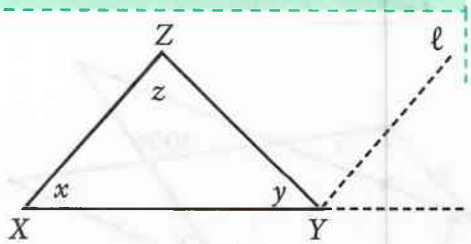
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

a) Usando la siguiente figura, demuestra que $\angle x + \angle y + \angle z = 180°$

b) Si conoces la medida de dos de los ángulos de un triángulo, puedes hallar la medida del tercer ángulo. Explica por qué es cierto ésto y cómo se procedería para calcular el ángulo desconocido.

____

____

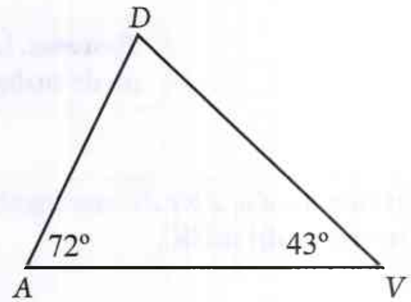


$\ell \parallel \overline{XZ}$

Estudia el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Encuentra la medida del ángulo D



Solución

Explora. Se presenta una situación que involucra ángulos interiores de un triángulo. Conocemos dos ángulos. Se nos pide $\angle D$.

Planifica. Si se aplica la propiedad de la suma de los ángulos interiores, se puede establecer una ecuación. Luego se resuelve la ecuación para la medida del ángulo desconocido.

Resuelve, $\angle A + \angle V + \angle D = 180°$.

Por la propiedad de sustitución: $72° + 43° + \angle D = 180°$
Reducción de términos semejantes: $115° + \angle D = 180°$
Propiedad de sustracción: $\angle D = 180° - 115° = 65°$

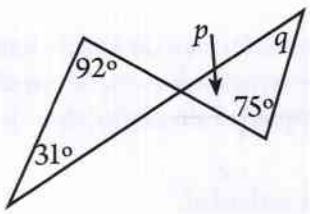
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1, 6.4 y 8.

2.2 EJERCICIOS

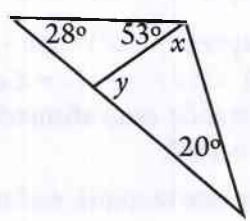
1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

En los ejercicios 2-9, determina las medidas de los ángulos.

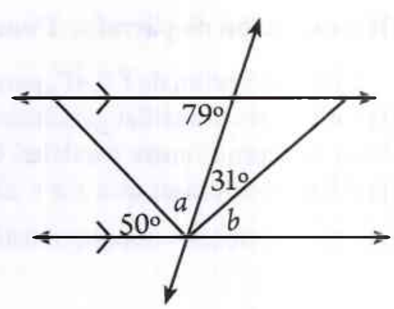
2. $p =$ ______, $q =$ ______



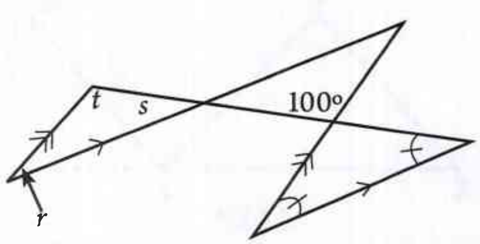
3. $x =$ ______, $y =$ ______



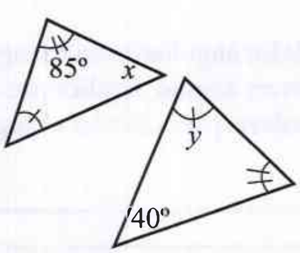
4. $a =$ ______, $b =$ ______



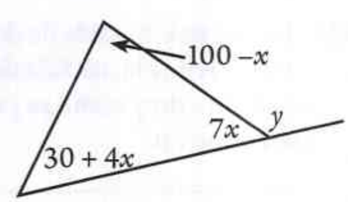
5. $r =$ ______, $s =$ ______
$t =$ ______



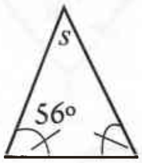
6. $x =$ ______, $y =$ ______



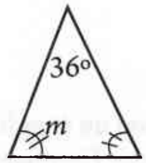
7. $y =$ ______



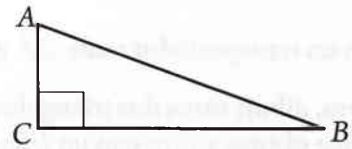
8. $s =$ ______



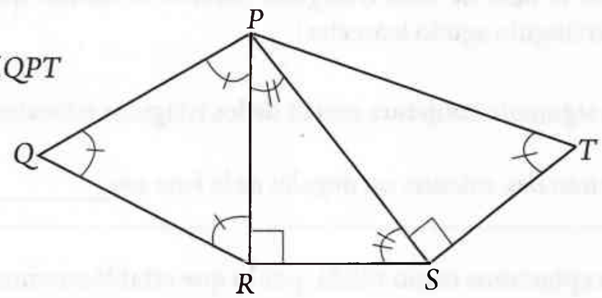
9. $m =$ ______

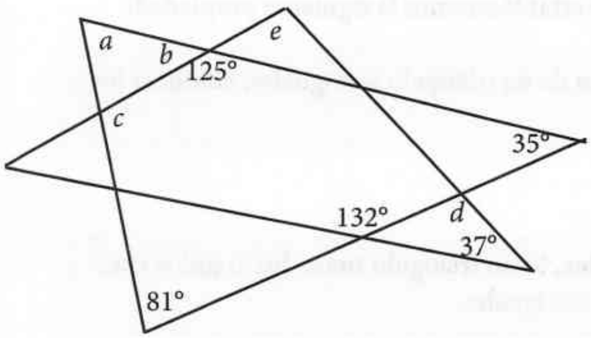


10. Explica por qué $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios



11. Encuentra la medida de $\angle QPT$

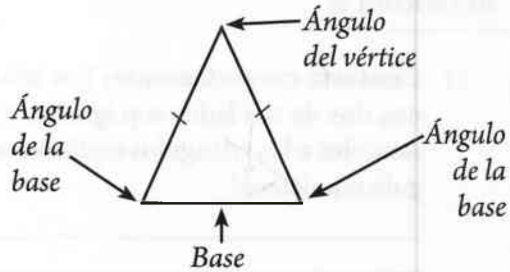




12. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? A partir de este dato calcula la medida de los ángulos a, b, c, d y e, de la siguiente figura. Debes mostrar todo el procedimiento seguido.

2.3 Propiedades de los triángulos (2): Triángulos isósceles.

Triángulos isósceles



Recuerda que un triángulo isósceles, es un triángulo que tiene al menos dos lados iguales. El ángulo que está entre los lados iguales se denomina ángulo del vértice. El lado opuesto al ángulo del vértice se llama la base. Los dos ángulos formados por la base y uno de los lados iguales se llaman ángulos de la base.

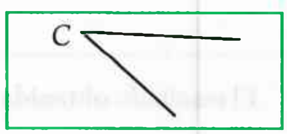
Realiza la siguiente actividad de exploración acerca de los ángulos de los triángulos isósceles:

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

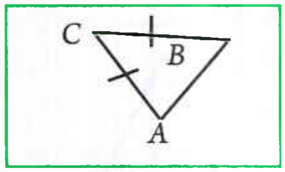
Actividad 7

a) **Lee con atención** las instrucciones para construir un triángulo isósceles (Repite los pasos):

1. Dibuja en un papel, un ángulo agudo con vértice C.
2. Marca longitudes iguales sobre los lados del $\angle C$. Si es necesario, debes prolongar estos lados. Nombra los puntos A y B. Dibuja $\overline{AB}$. Entonces, el ΔABC es isósceles, de base $\overline{AB}$.

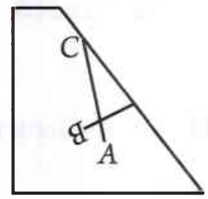


3. Dobla el papel por C de tal manera que A coincida con el punto B. ¿Qué notas en $\angle A$ y $\angle B$?



4. Con un transportador mide $\angle A$ y $\angle B$.

5. Ahora, dibuja otros dos triángulos isósceles; uno con un ángulo del vértice obtuso y otro con un ángulo del vértice recto. Compara los ángulos de la base de cada triángulo. ¿Sucede lo mismo que en el caso del triángulo agudo isósceles?



b) **Completa** la siguiente conjetura acerca de los triágulos isósceles:

Si un triángulo es isósceles, entonces sus ángulos de la base son ______________

Esta conjetura la aceptaremos como válida, por lo que estableceremos la siguiente propiedad:

Propiedad del triángulo isósceles. Si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los ángulos opuestos a esos lados son iguales.

El inverso de esta propiedad también es válido.

Inverso de la propiedad del triángulo isósceles. Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, entonces los lados opuestos a esos ángulos, son iguales.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 8

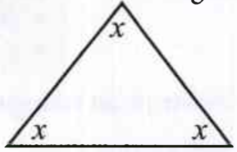
a) **Contesta correctamente:** Los triángulos equiláteros también son isósceles, porque al menos dos de sus lados son iguales. ¿Cómo crees que se aplica la propiedad de los triángulos isósceles a los triángulos equiláteros? ¿Qué se puede decir acerca de los ángulos de un triángulo equilátero?

____

____

____

Tu respuesta debe establecer que los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales. Utiliza la siguiente figura para encontrar el valor de cada ángulo de un triángulo equilátero.



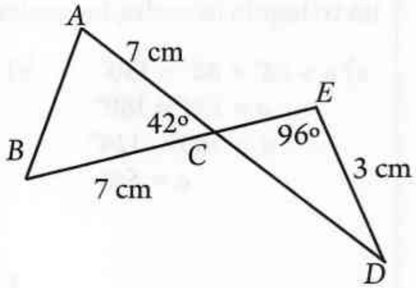
$\angle x =$

El resultado obtenido en esta actividad, nos permite establecer la siguiente propiedad.

Propiedad del triángulo equilátero. Cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°.

Ejemplo 1.

A partir de la figura, calcula las medidas de los ángulos: $\angle A$, $\angle D$ y la longitud de EC.



Solución

Explora. Se presenta una situación que involucra ángulos interiores de dos triángulos, uno de ellos isósceles.

Planifica y resuelve. Si se aplica la propiedad de la suma de los ángulos interiores en el $\angle ABC$, se puede establecer la ecuación: $\angle A + \angle B + 42° = 180°$.

Además, en esta ecuación debemos considerar que $\angle A = \angle B$.

Entonces:

$$\angle A + \angle B + 42° = 180°$$
$$2\angle A + 42° = 180°.$$

Aplicando la propiedad de sustracción y de la división:

$$\angle A = \frac{180° - 42°}{2} = 69°$$

Si se aplica la propiedad de la suma de los ángulos interiores en el ΔCDE, puede establecer la ecuación:

$$\angle ECD + \angle D + 96° = 180°$$

Pero, $\angle ACB$ y $\angle ECD$ son opuestos por el vértice, entonces son iguales.

Por tanto $\angle ECD = 42°$. Entonces, según la propiedad de sustitución tenemos:

$$42° + \angle D + 96° = 180°$$

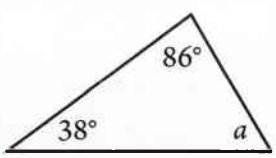
Resolviendo obtenemos: $\angle D = 42°$.

Como $\angle ECD = \angle D$, ΔCDE es isósceles según el inverso de la propiedad del triángulo isósceles. Entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes, así que $EC = ED = 3$cm.

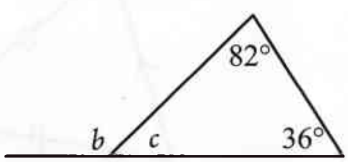
Ejemplo 2.

Obtén en cada inciso los ángulos que se indican.

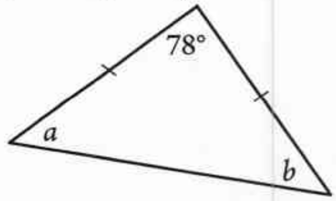
a) El ángulo interior *a*.



b) El ángulo exterior *b*.



c) Los ángulo *a* y *b*.



Solución

Explora. En el inciso a), se presenta una situación que involucra a un ángulo interior de un triángulo, en el b) se pide un ángulo exterior y en el c) se buscan dos ángulos de la base de un triángulo isósceles, los cuales son iguales.

a) $a + 38° + 86° = 180°$
$a + 124° = 180°$
$a = 180° - 124°$
$a = 56°$

b) $c + 82° + 36° = 180°$
$c = 180° - 82° - 36°$
$c = 180° - 118°$
$c = 62°$

$b + c = 180°$
$b + 62° = 180°$
$b = 180° - 62°$
$b = 118°$

c) Puesto que $a + b + 78° = 180°$ y $a = b$, podemos escribir,

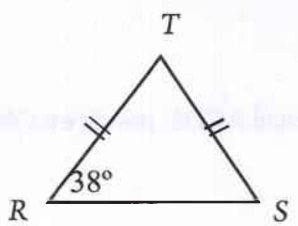
$b + b + 78° = 180°$
$b + 78° = 180°$
$2b = 180° - 78°$
$2b = 102°$
$b = 102°/2$
$b = 51°$

2.3 EJERCICIOS

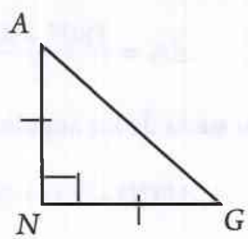
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1, 6.4 y 8.

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

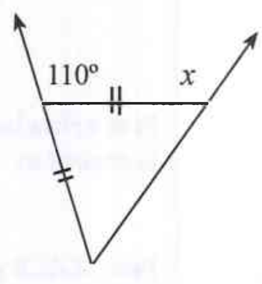
2. $\angle T =$ ____



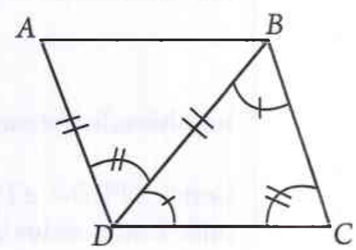
3. $\angle G =$ ____



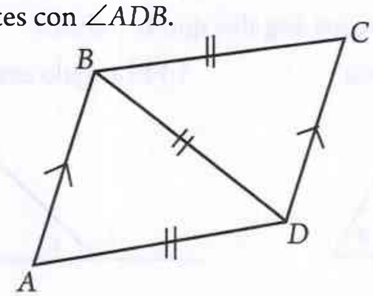
4. $\angle x =$ ____



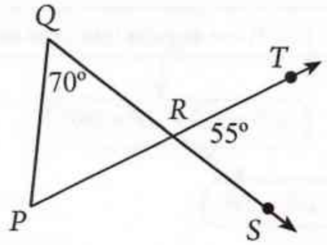
5. En la figura de la derecha, $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{DC}$.
   a) Nombra el ángulo o los ángulos congruentes con $\angle A$.
   b) Nombra el segmento o los segmentos congruentes con BC.



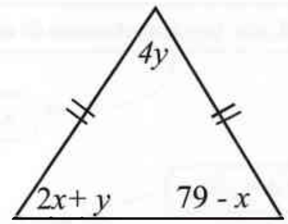
6. En la figura:
   a) Nombra el ángulo o los ángulos congruentes con $\angle DAB$.
   b) Nombra el ángulo o los ángulos congruentes con $\angle ADB$.



7. Demuestra que el ΔPQR es isósceles.



8. En la figura, calcula el valor de x y el de y:



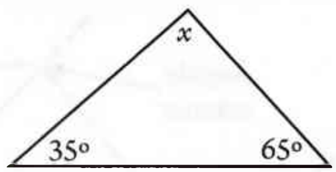
2.4 Propiedades de los triángulos (3): Tercer ángulo, ángulos exterior y desigualdad triangular.

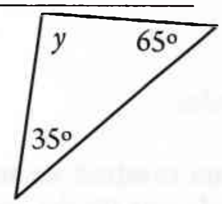
Realiza la siguiente actividad que te permitirá explorar una propiedad importante de los ángulos de los triángulos.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 9

a) **Trata de contestar la siguiente pregunta:** Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, ¿cómo son entre si los dos ángulos restantes?______________________





En los triángulos siguientes, calcula el valor de x y el de y.

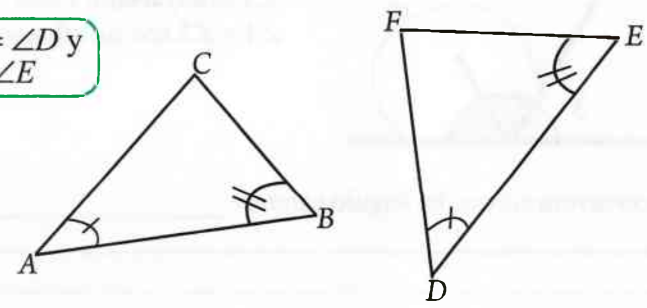
b) **Establece tu conjetura:** ____

____

Tu conjetura debe ser parecida a lo indicado en el siguiente teorema:

Teorema: Si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo, entonces el tercer ángulo de uno de los triángulos es igual al tercer ángulo del otro.

Hipótesis: $\angle A = \angle D$ y $\angle B = \angle E$



Tesis: $\angle C = \angle F$

Razonamiento en forma de flujo:

$\angle A$, $\angle B$ y $\angle B$, son ángulos interiores de un triángulo.

$\angle D$, $\angle E$ y $\angle F$, son ángulos interiores de un triángulo.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\angle D + \angle E + \angle F = 180°$

$\angle A = \angle D$

$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$

$\angle B = \angle E$

$\cancel{\angle D} + \cancel{\angle E} + \angle C = \cancel{\angle D} + \cancel{\angle E} + \angle F \longrightarrow \angle C = \angle F$

Demostración de párrafo: Demuestra que $\angle C = \angle F$.

Aplicando la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo, se cumple que, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ y que $\angle D + \angle E + \angle F = 180°$. La propiedad transitiva de la igualdad nos permite asegurar que $\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$, sustituyendo en esta igualdad $\angle A = \angle B$ dados como hipótesis, obtenemos, $\angle D + \angle E + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$. Finalmente, aplicando la propiedad de sustracción de la igualdad obtenemos $\angle C = \angle F$.

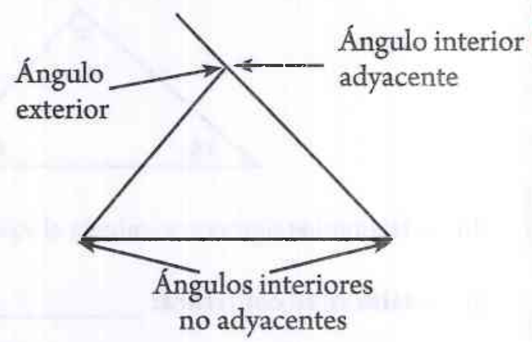
Ahora explorarás otra propiedad de los triángulos.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

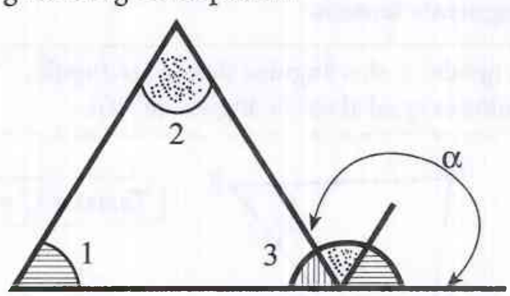
Actividad 10

a) Lee con atención:

Recuerda que para construir un ángulo exterior, se prolonga un lado más allá del vértice. Cada ángulo exterior de un triángulo, tiene un ángulo interior adyacente y un par de ángulos interiores no adyacente.



Recordemos la malla triangular de la actividad 5 de la lección 2.2. Los ángulos coloreados también siguen el siguiente patrón:



Tomando en cuenta las marcas sobre los ángulos, observa que :

$\angle\alpha = \angle 1 + \angle 2$

$\angle 3$ es adyacente a $\angle\alpha$

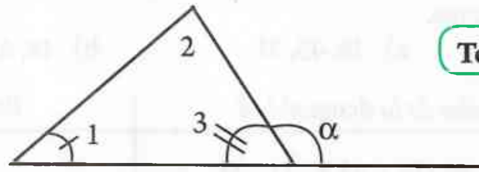
$\angle 1$ y $\angle 2$ son no adyacentes a $\angle\alpha$

b) Establece una conjetura acerca del ángulo exterior ______________________________
____

Tu conjetura debe ser pareciada a lo indicado por el siguiente teorema:

Teorema: La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes.

Hipótesis: $\angle\alpha$ es un ángulo exterior de un triángulo.



Tesis: $\angle a = \angle 1 + \angle 2$

Razonamiento en forma de flujo:

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

$\angle\alpha + \angle 3 = 180°$

$\angle 1 + \angle 2 + \cancel{\angle 3} = \angle\alpha + \cancel{\angle 3}$

$\angle\alpha = \angle 1 + \angle 2$

Actividad 11

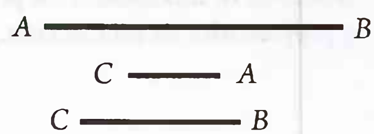
Escribe una demostración de párrafo de este teorema.

Realiza la siguiente actividad para que descubras otra propiedad de los triángulos relacionada con sus lados:

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 12

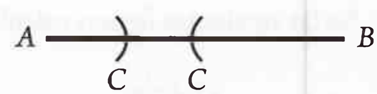
Considera el primer conjunto de segmentos. Trata de construir un triángulo ABC.



Procedimiento:

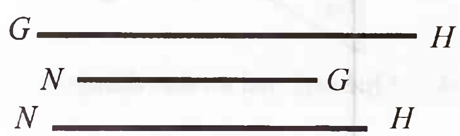
a) Primero copia $\overline{AB}$

b) Para construir los otros dos lados del triángulo, tiende un arco de longitud CA, centrado en el punto A, y un arco de longitud CB centrado en el punto B.



Para que los segmentos formen un triángulo, el punto C tendría que estar en ambos arcos. Sin embargo, los dos arcos no se intersecan, así que es imposible construir un triángulo con las longitudes de lados $\overline{AB}$, $\overline{CA}$, y $\overline{CB}$.

Ahora intenta usar el segundo conjunto de segmentos para construir un triángulo GNH. ¿Puedes hacerlo? ¿Por qué sí o por qué no?



Aceptaremos la siguiente propiedad:

Propiedad de la desigualdad del triángulo. La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

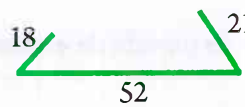
Estudia el siguiente ejemplo y completa:

Ejemplo

Los siguientes conjuntos de números, representan las medidas de segmentos. Verifica la desigualdad triangular para cada caso.

a) 18, 45, 21 b) 18, 45, 52 c) 18, 21, 52.

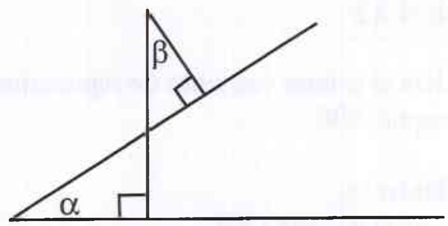
Solución

Prueba de la desigualdad	*Bosquejo*	*¿Triángulo?*
a) Es ¿18 + 45 > 21? Sí Es ¿18 + 21 > 45? No Es ¿45 + 21 > 18? ____		No
b) Es ¿18 + 45 > 52? Sí Es ¿18 + 52 > 45? ____ Es ¿45 + 52 > 18? ____		Sí
c) Es ¿18 + 21 >52? ____ Es ¿18 + 52 > 21? ____ Es ¿21 + 52 > 18? ____		____

2.4 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1, 6.4 y 8.

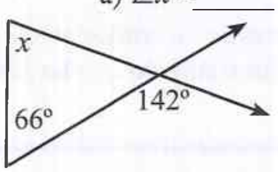
1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.



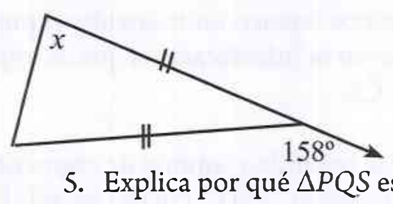
2. Presenta un argumento de por qué $\angle\alpha = \angle\beta$.

3. En las siguientes figuras calcula el valor de x.

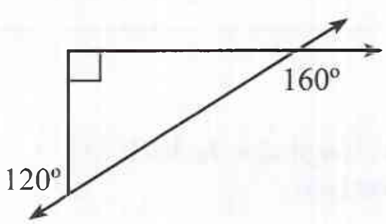
a) $\angle x =$ ____



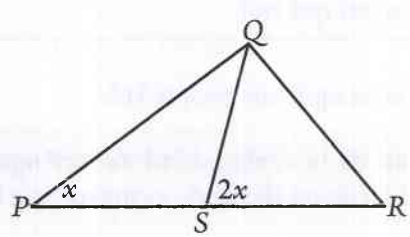
b) $\angle x =$ ____



4. ¿Qué está mal en este dibujo?



5. Explica por qué ΔPQS es isósceles.



En los ejercicios 6 - 9, determina si es posible dibujar un triángulo con lados de medida dadas. Si es posible, escribe si. Si no es posible, escribe no y da un argumento de por qué no es posible.

6. 16 cm, 30 cm, 45 cm
7. 9 km, 17 km, 28 km
8. 32 m, 60 m, 87 m
9. 13.4 cm, 17.7 cm, 31.1 cm.

En los ejercicios 10 y 11, usa un compás y una regla para construir un triángulo con los lados dados. Si no es posble, explica por qué no.

10. A ________ B
B __________ C
A ______________________ C

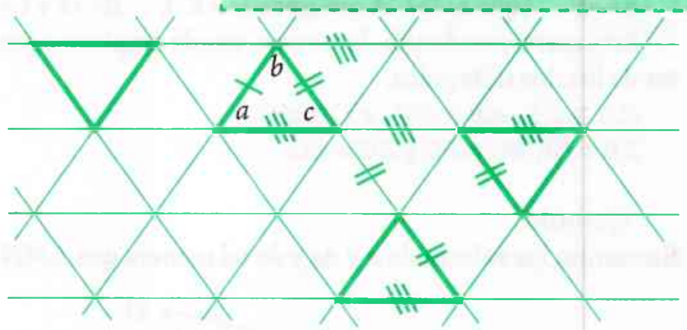
11. P __________ Q
Q ____________ R
P ________ R

2.5 Triángulos congruentes: definición

Para explorar otro concepto importante, realiza la siguiente actividad:

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

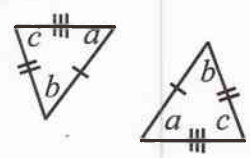
Actividad 13



a) **Lee con atención:**

En la malla triangular adjunta existen muchos triángulos, pero, ¿cuántos triángulos «diferentes» hay? ¿Hay triángulos con ángulos y lados «diferentes»? Analiza los cuatro triángulos remarcados. En uno de ellos suponemos conocidos los ángulos a, b y c, y los lados con marcas. A partir de estos datos y aplicando lo que sabes de sierras y escaleras, determina los ángulos y los lados de los otros dos triángulos remarcados.

b) **Completa:** Todos los triángulos de la malla tienen sus ángulos respectivos ________________ y sus lados ______________. Es decir, la malla puede formarse con traslaciones y rotaciones de un sólo triángulo. O con traslaciones de los dos triángulos de la derecha:
Se dice que estos triángulos son **congruentes o iguales.**



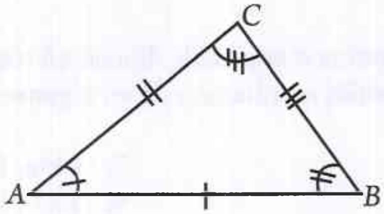
c) **Trata de completar** la definición de triángulos congruentes.
Dos triángulos son congruentes si ____

____

d) **Ahora,** lee atentamente la definición de triángulos congruentes:

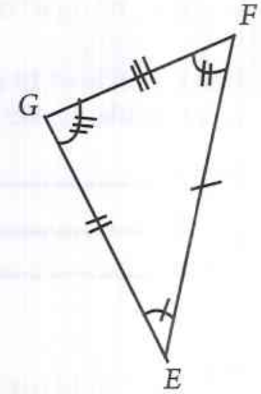
> Dos triángulos son congruentes o iguales si y solamente si, tienen exactamente el mismo tamaño y la misma forma. Si dos triángulos son congruentes, entonces los ángulos y lados correspondientes son congruentes o iguales.

Simbólicamente:



Si $\Delta ABC \cong \Delta EFG$ entonces,
$\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle G,$
$\overline{AB} \cong \overline{EF}, \overline{BC} \cong \overline{FG}$ y $\overline{CA} \cong \overline{GE}$

La expresión $\Delta ABC \cong \Delta EFG$ se lee como
"triángulo ABC es congruente con triángulo EFG"



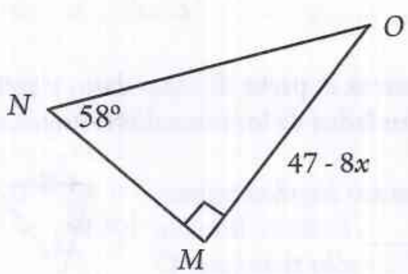
El "si y solamente si" de la definición significa que el inverso de ella también es válida. Es decir,
Si $\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle G, \overline{AB} \cong \overline{EF}, \overline{BC} \cong \overline{FG}$ y $\overline{CA} \cong \overline{GE}$,
entonces $\Delta ABC \cong \Delta EFG$

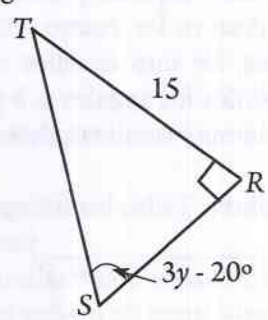
Si mediante traslaciones y rotaciones, uno de los triángulos se superpone encima del otro, todos los puntos de uno coincidirán con los puntos respectivos del otro. Esto significa que, **P**artes **C**orrespondientes de **T**riángulos **C**ongruentes son **C**ongruentes o coinciden (**PCTCC**).

Lee con atención: Si el ΔABC es congruente con el ΔEFG ($\Delta ABC \cong \Delta EFG$) los vértices de los dos triángulos se corresponden en el mismo orden en que las letras nombran los triángulos, a saber:
$A \leftrightarrow E$ (que se lee *"A corresponde a E"*), $B \leftrightarrow F$ y $C \leftrightarrow G$
Esta correspondencia de vértices puede emplearse para nombrar los lados y ángulos correspondientes de los dos triángulos.
$\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle G,$
$AB = EF, BC = FG$ y $AC = EG$

Ejemplo

Encuentra los valores de x y de y de tal manera que ΔMNO sea congruente a ΔRST.





Solución | Puesto que $\Delta MNO \cong \Delta RST$ entonces es válida la siguiente correspondencia:

$$\Delta MNO \cong \Delta RST$$

Esto se traduce en: $\angle M \cong \angle R$, $\angle N \cong \angle S$, $\angle O \cong \angle T$, $MN = RS$, $MO = RT$ y $NO = ST$.
Atendiendo los datos, elegimos:

$m\angle N = m\angle S$	$MO = RT$
$58° = 3y - 20°$	$47 - 8x = 15$
$78° = 3y$	$-8x = -32$
$26° = y$	$x = 4$

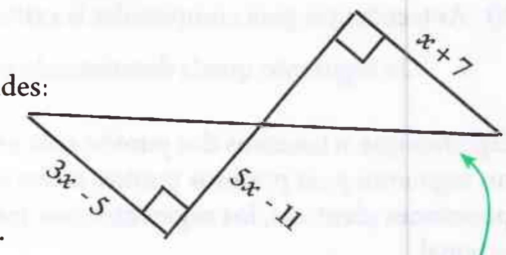
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1, 6.4 y 8.

2.5 EJERCICIOS

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

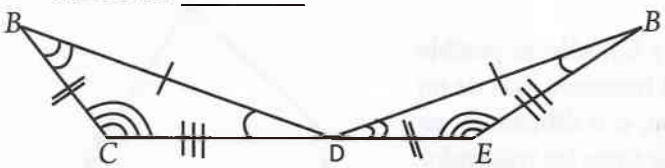
2. Dado $\Delta CAT \cong \Delta DOG$, $CA = 14$, $AT = 18$, $TC = 21$, y $DG = 2x + 7$.
   a. Dibuja y nombra una figura que muestre los triángulos congruentes.
   b. Encuentra el valor de x.

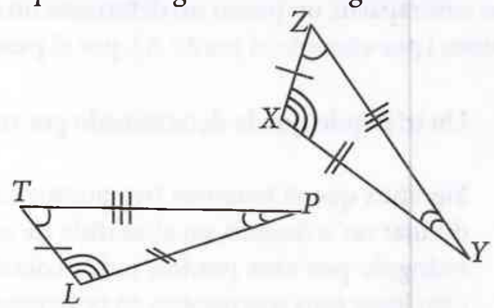
3. Dibuja dos triángulos que posean las siguientes propiedades:
   a. Áreas iguales y son congruentes.
   b. Perímetros iguales y son congruentes.
   c. Áreas iguales pero no son congruentes.
   d. No son congruentes pero tienen el mismo perímetro.



4. En la siguiente figura encuentra el valor de x de tal manera que los triángulos sean congruentes.

5. Completa cada proposición de congruencia:
   a. $\Delta CDB \cong$ ________
   b. $\Delta PTL \cong$ ________





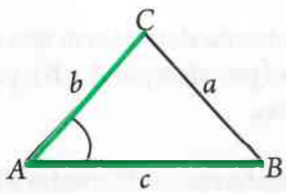
2.6 Criterios de congruencia

Lee con atención: En cierto sentido, la congruencia se trata de determinación. Conocer los tres lados y los tres ángulos ciertamente determina un triángulo. En otras palabras, si dibujas un segundo triángulo con todos los lados y ángulos congruentes con aquellos en el primer triángulo, el segundo triángulo será congruente con el primero. Esencialmente será el mismo triángulo. Entonces, conocer tres ángulos y tres lados garantiza el tamaño y la forma del triángulo, y todos los triángulos que comparten ese conjunto de medidas tienen garantizada la congruencia entre sí. Pero, ¿se requieren estos seis elementos para garantizar la congruencia? Por ejemplo, ¿es suficiente conocer tres ángulos para determinar un triángulo? ¿Es suficiente conocer dos lados y un ángulo? De la misma manera, ¿cómo se puede decir si dos triángulos son congruentes? ¿Son congruentes si sus tres ángulos tienen la misma medida? o, ¿si dos lados y un ángulo son iguales? En esta lección encontrarás las respuestas a estas preguntas.

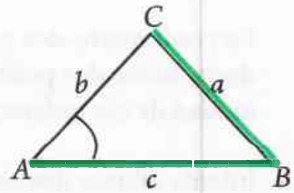
Empezaremos estudiando los siguientes conceptos previos:

a) Antecedentes para comprender la terminología implicada en los criterios de congruencia:

Dos lados ***comprenden un ángulo*** si el vértice de éste es un extremo de ambos lados.

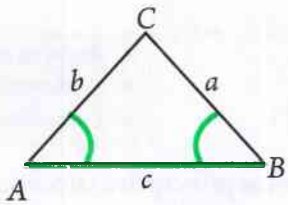


Los lados b y c comprenden al ángulo A.

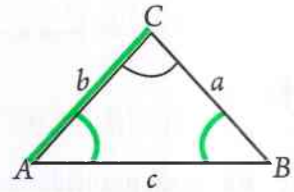


Los lados a y c no comprenden al ángulo A.

Dos ángulos ***comprenden un lado*** si los extremos del lado son vértices de los dos ángulos.



Los ángulos A y B comprenden al lado c.

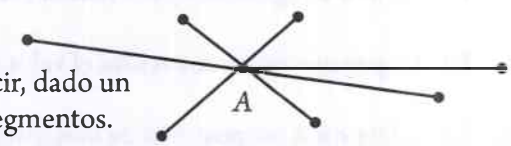


Los ángulos A y B *no* comprenden al lado a.

b) Antecedentes para comprender la existencia de elementos mínimos que determinan un triángulo:

- Un segmento queda determinado por dos puntos:

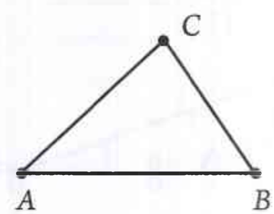
Significa que si tenemos dos puntos, sólo es posible dibujar un segmento, en el sentido de que si más de un segmento pasa por esos puntos, todos coincidirán, o si dibujamos en otro lado esos dos puntos, en posiciones idénticas, los segmentos que tracemos sobre ellos serán congruentes todos entre sí y con el original.



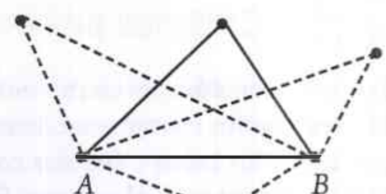
En contraparte, un punto no determina un segmento; es decir, dado un punto (por ejemplo el punto A), por el pasan infinidad de segmentos.

- Un triángulo queda determinado por tres puntos no colineales:

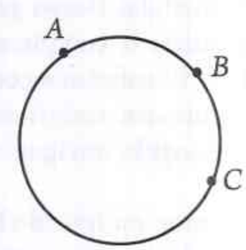
  Significa que si tenemos tres puntos (A, B y C), sólo es posible dibujar un triángulo, en el sentido de que si trazamos más de un triángulo por esos puntos, todos coincidirán, o si dibujamos en otro lugar esos tres puntos, en posiciones idénticas, los triángulos que tracemos sobre ellos serán congruentes todos entre sí y con el original.



  En contraparte, dos puntos no determinan un triángulo; es decir, dados dos puntos (por ejemplo A y B), por ellos pasan infinidad de triángulos.

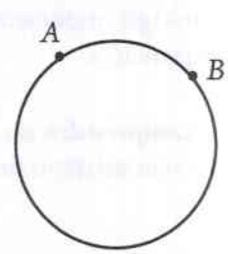


- Una circunferencia queda determinada por tres puntos, no colineales:



  Significa que si tenemos tres puntos (A, B y C), sólo es posible dibujar una circunferencia sobre la dibujada, o si dibujamos en otro lugar esos tres puntos, en posiciones idénticas, las circunferencias que tracemos sobre ellos serán congruentes todas entre sí y con la original.

  En contraparte, dos puntos no determinan una circunferencia; es decir, dados dos puntos (por ejemplo A y B), por ellos pasan infinidad de circunferencias.

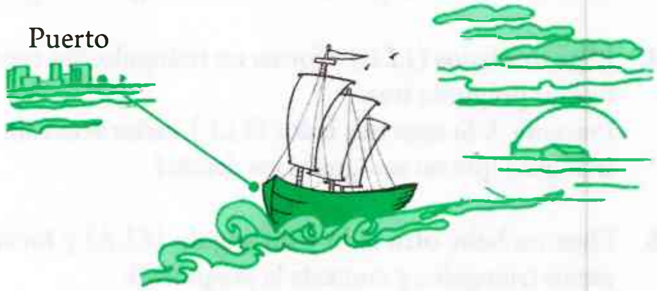


  Intenta dibujar dos circunferencias diferentes a la mostrada y que pasen por A y B.

Ahora, utilizaremos las ideas anteriores para estudiar los criterios de congruencia de triángulos. Estos criterios de congruencia, son las condiciones que determinan el trazado de triángulos. ¿Cuál es la importancia de estos criterios? La importancia estriba en que, conocidos ciertos elementos de los triángulos, automáticamente los restantes son iguales.

Ésto fue aplicado por Tales de Mileto (600 a.C.) para resolver el siguiente problema:

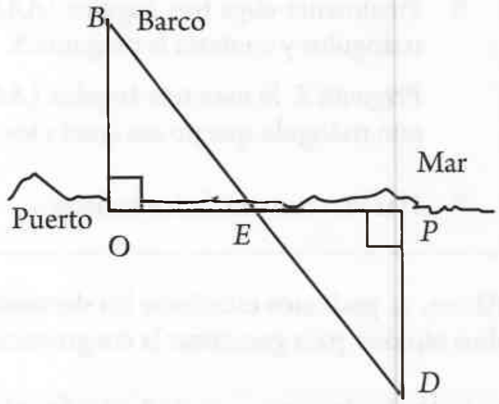
¿A qué distancia del puerto se encuentra un barco?



Para resolver este problema, tales utilizó el siguiente postulado: «*dos triángulos son iguales si tienen dos ángulos y un lado respectivamente iguales*», y la figura mostrada.

¿Qué ángulos del ΔBOE son iguales a los del ΔDPE? ________________ ¿Por qué?_____________

Se trata de calcular la distancia OB. Tales planteó el siguiente procedimiento: Una persona observa el punto B y camina perpendicularmente a $\overline{OB}$, hasta el punto E, que marca con una estaca, y sigue caminado una distancia EP igual OE. Finalmente camina, perpendicularmente a $\overline{OP}$, hasta D, punto desde el que se ven en línea recta los puntos B, E y D. Puesto que: $\angle O = \angle P$, $OE = EP$ y $\angle OEB = \angle PED$, los triángulos son iguales. Por tanto, la distancia buscada OB, es igual a PD que se puede medir.



La siguiente actividad (realizada con ayuda de tecnología), tiene por objetivo el que explores las condiciones que determinan a un triángulo. En otras palabras, vas a descubrir cuáles son los criterios de congruencia en triángulos.

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de exploración con tecnología
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.6

Actividad 14

¡Indagando con ayuda de la tecnología!

Para explorar los denominados criterios de congruencia en triángulos, utilizarás una aplicación que aparece en la siguiente dirección:

http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=4.

1. Ingresa a ésta dirección, revisa cada una de las partes que aparecen, construye varios triángulos eligiendo tres de sus elementos.

2 Elige un lado, un ángulo y un lado (LAL) en ese orden, y forma un triángulo. Sin cambiar medidas forma varios triángulos y contesta la siguiente pregunta:

Pregunta 1. Si para construir triángulos usas un lado, un ángulo y un lado (LAL) varias veces sin cambiar medidas, ¿puedes encontrar algún triángulo que no sea igual a los demás?

3. Ahora elige un ángulo, un lado y un ángulo (ALA) en ese orden y forma un triángulo. Sin cambiar medidas forma varios triángulos y contesta la pregunta dos.
Pregunta 2. Si para construir triángulos usas un ángulo, un lado y un lado (ALA) varias veces sin cambiar medidas, ¿puedes encontrar algún triángulo que no sea igual a los demás?

4. Elige tres lados (LLL) y forma un triángulo. Sin cambiar medidas forma varios triángulos y contesta la pregunta tres..
Pregunta 3. Si usas tres lados (LLL) varias veces sin cambiar medidas, ¿puedes encontrar algún triángulo que no sea igual a los demás?

5. Elige un lado, otro lado y un ángulo (LLA) y forma un triángulo. Sin cambiar medidas forma varios triángulos y contesta la pregunta 4.

   Pregunta 4. Si usas dos lados y un ángulo (LLA) varias veces sin cambiar medidas, ¿puedes encontrar algún triángulo que no sea igual a los demás?

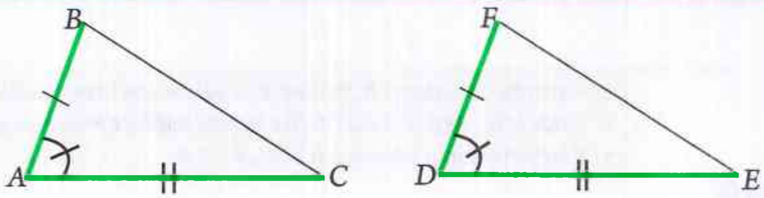
6. Finalmente elige tres ángulos (AAA) y forma un triángulo. Sin cambiar medidas forma varios triángulos y contesta la pregunta 5.

   Pregunta 5. Si usas tres ángulos (AAA) varias veces sin cambiar medidas, ¿puedes encontrar algún triángulo que no sea igual a los demás?

7. Haz un resumen de tus hallazgos.

Ahora, ya podemos establecer los denominados criterios de congruencia. Estos criterios, que son medios rápidos para garantizar la congruencia de dos triángulos, están listados a continuación:

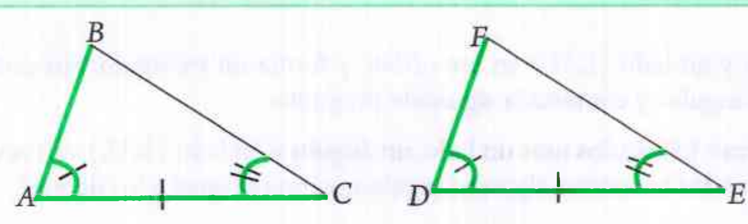
Criterio de congruencia *Lado-Ángulo-Lado* (LAL). Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes a dos lados y al ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



$\Delta BAC \cong \Delta FDE$ por LAL

Interpretación: Si $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$ y $\overline{AC} \cong \overline{DE}$, automáticamente se cumple que: $\overline{BC} \cong \overline{FE}$, $\angle B \cong \angle F$ y $\angle C \cong \angle E$.

Criterio de congruencia *Ángulo-Lado-Ángulo* (ALA). Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

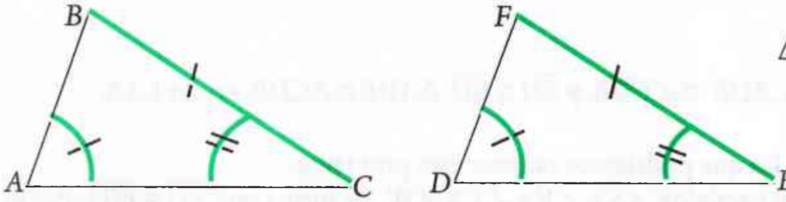


$\Delta BAC \cong \Delta FDE$ por ALA

Interpretación: Si $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DE}$ y $\angle C \cong \angle E$, automáticamente se cumple que: $\overline{AB} \cong \overline{DF}$ $\angle B \cong \angle F$ y $\overline{BC} \cong \overline{FE}$.

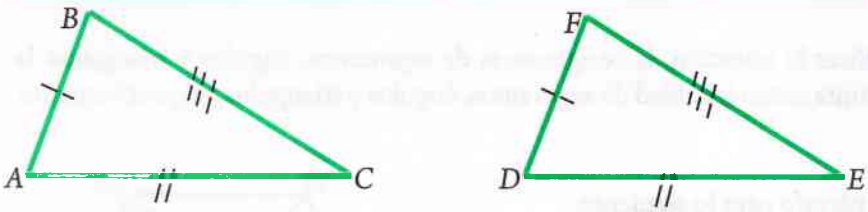
Aplicando la propiedad del tercer ángulo, y el criterio *ALA*, se puede establecer que *AAL* es criterio de congruencia. Medita esta cuestión. A continuación establecemos el criterio de congruencia *AAL* (o *LAA*).

Criterio de congruencia *Ángulo-Ángulo -Lado (AAL o LAA)*. Si dos ángulos y un lado no comprendido de un triángulo son congruentes con los ángulos correspondientes y el lado de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



$\Delta BAC \cong \Delta FDE$, por *AAL* o *LAA*.

Criterio de congruencia *Lado-Lado-Lado (LLL)*. Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

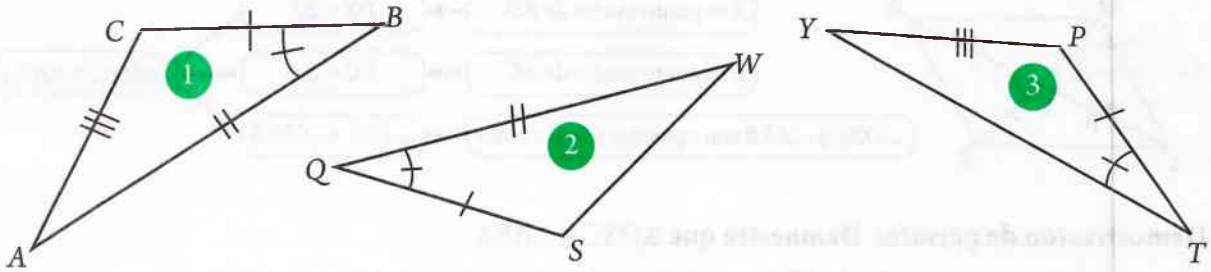


$\Delta BAC \cong \Delta FDE$, por *LLL*

Interpretación: Si $\overline{AC} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{FE}$, automáticamente se cumple que: $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle F$ y $\angle C \cong \angle E$.

Ejemplo

Usando solamente la información dada, determina cuáles de los siguientes triángulos son congruentes.



Solución

Comparando 1 y 2: Como $AB \cong WQ$, $\angle B \cong \angle Q$ y $BC \cong QS$, $\Delta ABC \cong \Delta WQS$ Según *LAL*:

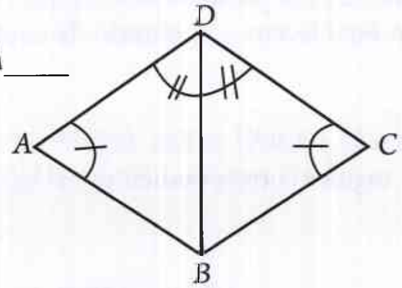
Comparando 1 y 3: Se afirma que $\overline{PT} \cong \overline{CB}$, $\overline{PY} \cong \overline{AC}$ y $\angle B \cong \angle T$. Es decir aparece *LLA*, pero ésto no es un criterio de congruencia.

Comparando 2 y 3: Sólo se sabe que $\angle Q \cong \angle T$ y $\overline{QS} \cong \overline{PT}$. Ésto no es suficiente información para concluir que los triángulos son congruentes.

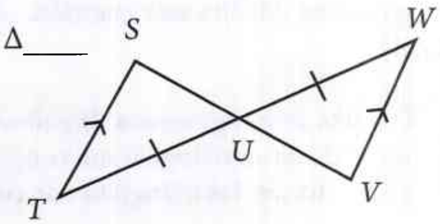
Ejemplo

Completa cada proposición y especifica qué criterio se usa para determinar que los triángulos son congruentes.

a) $\Delta ADB \cong \Delta$____



b) $\Delta STU \cong \Delta$____



Solución

a) Como $\angle A \cong \angle C$, $\angle ADB \cong \angle CDB$, y $\overline{BD} \cong \overline{BD}$, $\Delta ADB \cong \Delta CDB$, según *LAA*.

b) Hay dos formas en las que podríamos razonar este problema.

- Como $\overline{ST}$ y $\overline{WV}$ son paralelos, $\angle S \cong \angle V$ y $\angle T \cong \angle W$. Se afirma que $\overline{TU} \cong \overline{WU}$. Por lo tanto $\Delta STU \cong \Delta VWU$, según *LAA*.
- $\angle SUT \cong \angle VUW$ porque son ángulos opuestos por el vértice. $\angle T \cong \angle W$ porque $\overline{ST}$ y $\overline{WV}$ son paralelas. Se afirma que $\overline{TU} \cong \overline{WU}$. Por lo tanto $\Delta STU \cong \Delta VWU$, según *ALA*.

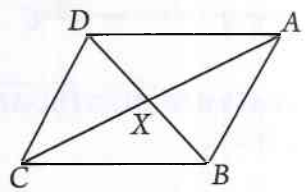
Observación: Para simplificar la notación, la congruencia de segmentos, ángulos y triángulos, la manejaremos de manera indistinta como igualdad de segmentos, ángulos y triángulos, respectivamente.

Ejemplo

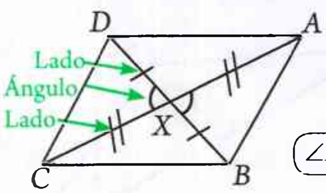
Escribe una demostración de párrafo para lo siguiente:

Hipótesis: X es punto medio de $\overline{BD}$
X es punto medio de $\overline{AC}$.

Demuestra: $\Delta DXC \cong \Delta BXA$



Razonamiento en forma de flujo



X es punto medio de $\overline{BD}$ → $DX = BX$

X es punto medio de $\overline{AC}$ → $XC = XA$

$\angle DXC$ y $\angle AXB$ son opuestos pór el vértice → $\angle DXC = \angle AXB$

$DX = BX$, $XC = XA$, $\angle DXC = \angle AXB$ → $\Delta DXC \cong \Delta BXA$

Demostración de párrafo: Demuestra que $\Delta DXC \cong \Delta BXA$.

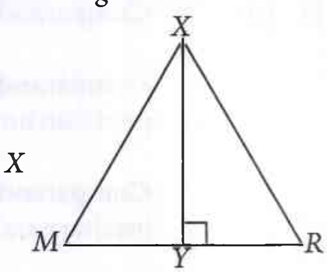
Puesto que X es punto medio de $\overline{BD}$, $DX = BX$; por la misma razón $XC = XA$. Además, $\angle DXC = \angle AXB$ por ser opuestos por el vértice. Por lo tanto, $\Delta DXC \cong \Delta BXA$, por el criterio *Lado-Ángulo-Lado*.

Ejemplo

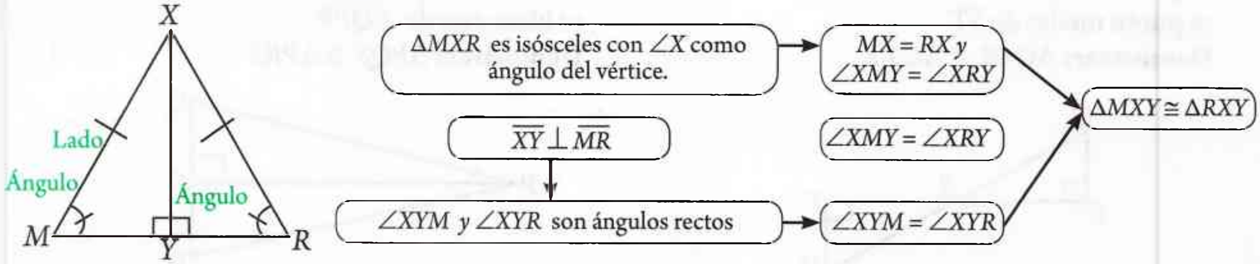
Escribe una demostración de párrafo para lo siguiente:

Hipótesis: ΔMXR es un triángulo isósceles con $\angle X$ como ángulo del vértice, $\overline{XY} \perp \overline{MR}$

Demuestra: $\Delta MXY \cong \Delta RXY$



Razonamiento en forma de flujo



Demostración de párrafo: Demuestra que $\Delta MXY \cong \Delta RXY$.

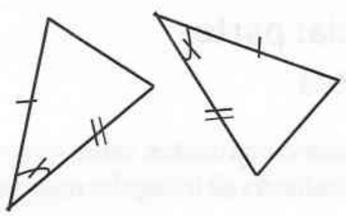
Por hipótesis, el ΔMXR *es* isósceles con $\angle X$ como ángulo del vértice; por lo tanto, se cumple que: $MX = RX$ *y* $\angle XMY = \angle XRY$. Además, se nos asegura que $\overline{XY} \perp \overline{MR}$, así que $\angle XYM = \angle XYR$ por ser ambos ángulos rectos. Por lo tanto, Por lo tanto, $\Delta MXY \cong \Delta RXY$ por el criterio *Lado-Ángulo-Ángulo.*

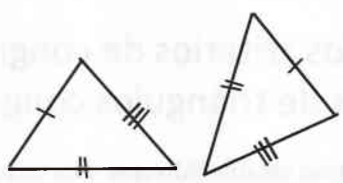
2.6 EJERCICIOS

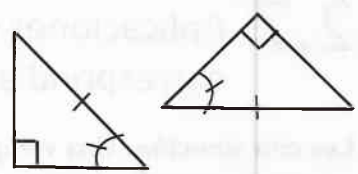
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1, 6.4 y 8.

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

2. ¿Por cuál de los tres postulados de congruencia (*LAL, ALA, LLL y LAA*) son congruentes los siguientes pares de triángulos?

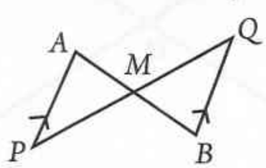
a) 

b) 

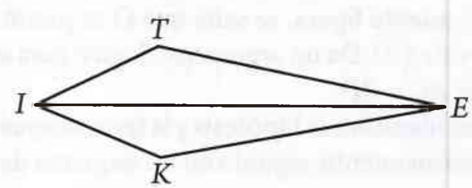
c) 

En cada uno de los ejercicios 3-9, utiliza la información proporcionada, para escribir una demostración de párrafo, que pruebe que los triángulos indicados son congruentes. Antes de plantear tu demostración, debes escribir en forma de flujo, el razonamiento que seguiste.

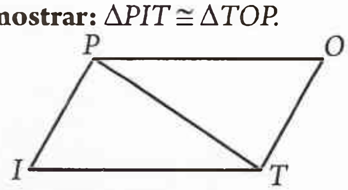
3. **Hipótesis:** M es punto medio de $\overline{AB}$ y de $\overline{PQ}$
Demostrar: $\Delta APM \cong \Delta BQM$.



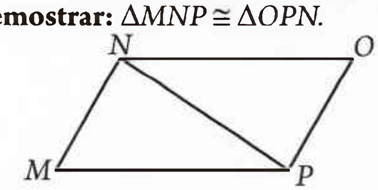
4. **Hipótesis:** $KI = TI$ y $TE = KE$
Demostrar: $\Delta KIE \cong \Delta TIE$.



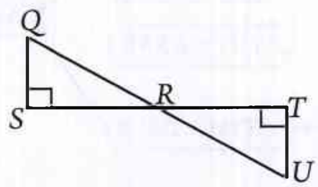
5. **Hipótesis:** $\overline{PO} \parallel \overline{IT}$, $\angle I = \angle O$
Demostrar: $\Delta PIT \cong \Delta TOP$.



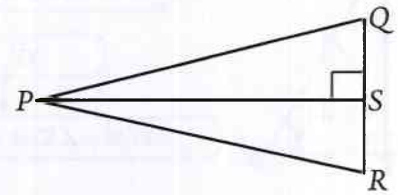
6. **Hipótesis:** $\overline{NO} \parallel \overline{MP}$, $NO = MP$
Demostrar: $\Delta MNP \cong \Delta OPN$.



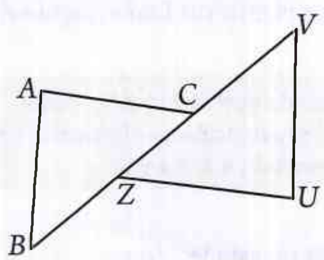
7. **Hipótesis:** $\overline{QS} \perp \overline{ST}$, $\overline{TU} \perp \overline{TS}$, R es punto medio de $\overline{ST}$
Demostrar: $\Delta QSR \cong \Delta UTR$



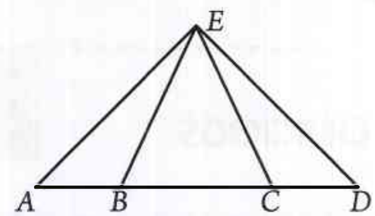
8. **Hipótesis:** $\overline{PS} \perp \overline{QR}$, $\overline{PS}$ es biscectriz de $\angle QPR$
Demostrar: $\Delta PQS \cong \Delta PRS$



9. **Hipótesis:** $\overline{AB} \parallel \overline{VU}$, $\overline{AC} \parallel \overline{ZU}$, $BZ = CV$
Demostrar: $\Delta ABC \cong \Delta UVZ$



10. **Hipótesis:** $\angle A = \angle D$, $\angle EBC = \angle ECB$, $AE = DE$
Demostrar: $\Delta ABE \cong \Delta DCE$



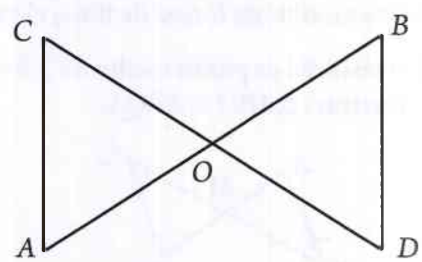
2.7 Aplicaciones de los criterios de congruencia: partes correspondientes de triángulos congruentes

Lee con atención: Una vez que hayas establecido que dos triángulos son congruentes, sabes que sus partes correspondientes son congruentes. La proposición *partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes* se abrevia PCTCC.

Estudia con atención el siguiente ejemplo. Observa que el argumento explica primero por qué los triángulos involucrados son congruentes.

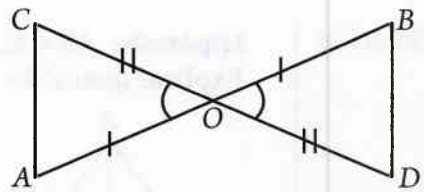
Ejemplo 1

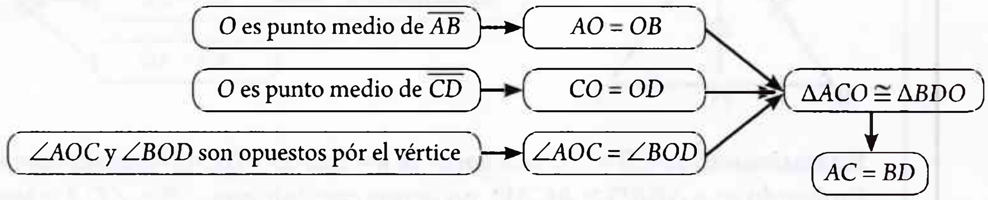
En la siguiente figura, se sabe que O es punto medio de $\overline{AB}$ y de $\overline{CD}$. Da un argumento lógico para explicar por qué $AC = BD$.
Primero identifica la hipótesis y la tesis, después escribe el razonamiento seguido en un esquema de flujo.



Solución

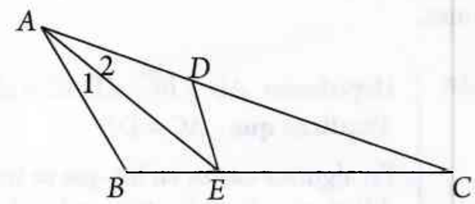
Hipótesis: O es punto medio de $\overline{AB}$ y de $\overline{CD}$.
Explicar que: $AC = BD$.





Razonamiento: Puesto que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son parte de los ΔACO y ΔBDO, primero debemos justificar que $\Delta ACO \cong \Delta BDO$ y después usaremos PCTC para concluir que $AC = BD$. De los datos tenemos que $AO = OB$ porque O es punto medio de $\overline{AB}$. También, $CO = OD$ por la misma misma propiedad aplicada a $\overline{CD}$. Además, de la figura $\angle AOC = \angle BOD$ por ser opuestos por el vértice. Por lo tanto se cumple el criterio LAL; de aquí concluimos que $\Delta ACO \cong \Delta BDO$ y entonces $AC = BD$.

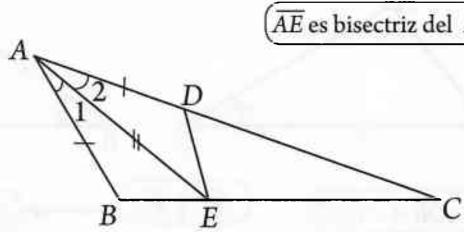
Ejemplo 2

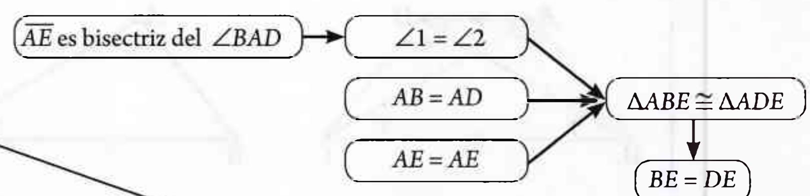


Da un argumento lógico para explicar por qué $BE = DE$. Se sabe que $AB = AD$ y $\overline{AE}$ es bisectriz de $\angle BAD$.

Solución

Hipótesis: $AB = AD$ y $\overline{AE}$ es bisectriz de $\angle BAD$.
Explicar que: $BE = DE$.



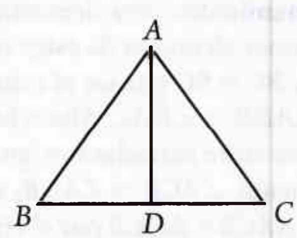


Razonamiento: Puesto que $\overline{BE}$ y $\overline{DE}$ son parte de los ΔABE y ΔADE, primero debemos justificar que $\Delta ABE \cong \Delta ADE$ y después usaremos PCTCC para concluir que $BE = DE$. De los datos tenemos que $AB = AD$ y $\angle 1 = \angle 2$ porque $\overline{AE}$ es bisectriz del $\angle BAD$.

También, $AE = AE$ por ser un lado común a los triángulos de interés y por la propiedad reflexiva. Por lo tanto se cumple el criterio LAL; de aquí concluimos que $\Delta ABE \cong \Delta ADE$ y por lo tanto $BE = DE$.

Ejemplo 3

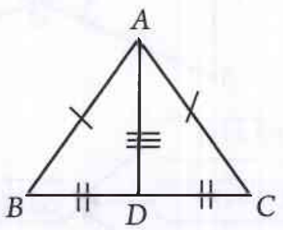
Da un argumento lógico para explicar por qué $\angle B = \angle C$, si se sabe que $AB = AC$ y $\overline{AD}$ es mediana.

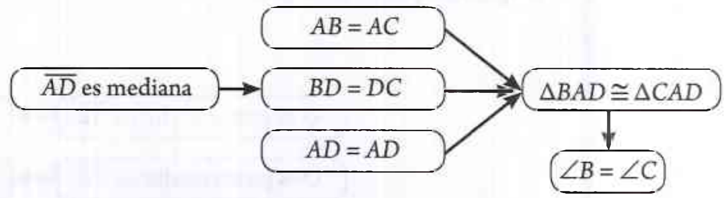


Solución

Hipótesis: $AB = AC$, y $\overline{AD}$ es mediana.

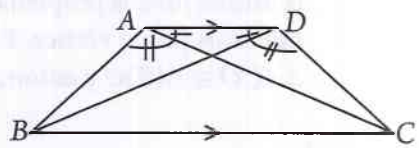
Explicar que: $\angle B = \angle C$





Razonamiento: $\angle B$ y $\angle C$ son parte de los ΔBAD y ΔCAD respectivamente. Probando que $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ podemos concluir que $\angle B = \angle C$. De los datos tenemos que $AB = AC$; además, $BD = DC$ porque $\overline{AD}$ es una mediana. También, $AD = AD$ por ser un lado común a los triángulos de interés y por la propiedad reflexiva. Por lo tanto se cumple el criterio LLL; de aquí concluimos que $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ y por lo tanto $\angle B = \angle C$.

Ejemplo 4



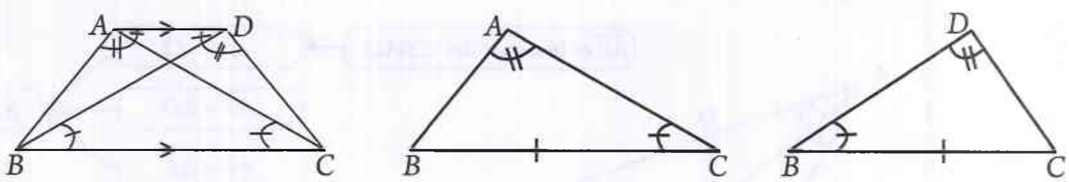
¿$AC = DB$? Escribe una demostración de párrafo explicando las razones.

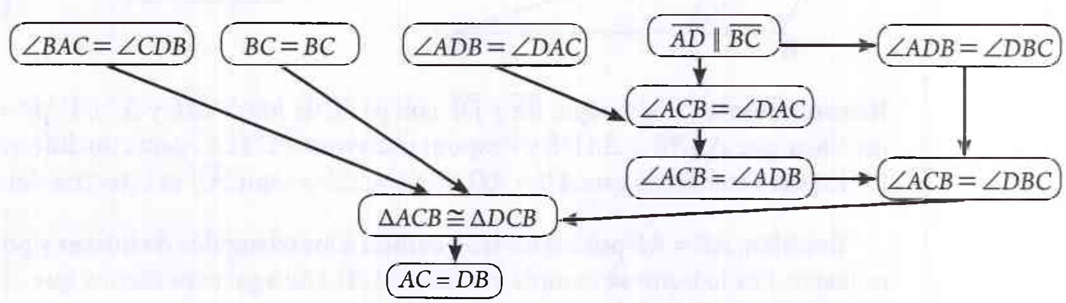
Solución

Hipótesis: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\angle DAC = \angle ADB$, $\angle BAC = \angle CDB$

Explicar que: $AC = DB$

En algunos casos, en los que se trata de demostrar congruencia entre triángulos, puede ser difícil visualizar los triángulos de interés y sus respectivos elementos congruentes. Asegúrate de señalar toda la información en tus figuras. Se recomienda dibujar los triángulos implicados de manera separada, para verlos con mayor claridad. Al ir descubriendo más información, señálala en las figura original y en los triángulos separados.





Razonamiento: para demostrar que $AC = DB$, debemos mostrar la congruencia de $\Delta ACB \cong \Delta DCB$. Un primer elemento de estos triángulos es un dato: $\angle BAC = \angle CDB$; el segundo dato se aprecia en la figura: $BC = BC$ por ser el mismo segmento (propiedad reflexiva de la igualdad). También se asegura que $\angle ADB = \angle DAC$. Ahora bien, puesto que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\angle ACB = \angle DAC$, porque los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales; por la misma razón $\angle ADB = \angle DBC$. Entonces, por la propiedad de sustitución, $\angle ACB = \angle ADB$; y volviendo a aplicar esta propiedad, obtenemos $\angle ACB = \angle DBC$. Por lo tanto, $\Delta ACB \cong \Delta DCB$ por el criterio LAA, y finalmente $AC = DB$ por $PCTCC$.

2.7 EJERCICIOS

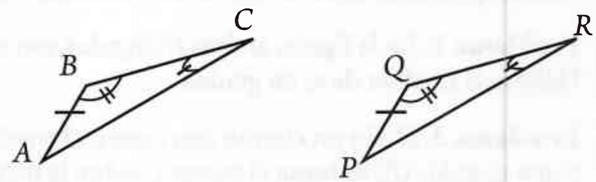
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1, 6.4 y 8.

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

En los ejercicios 2 y 3 usa las figuras de la derecha para explicar por qué cada igualdad es verdadera.

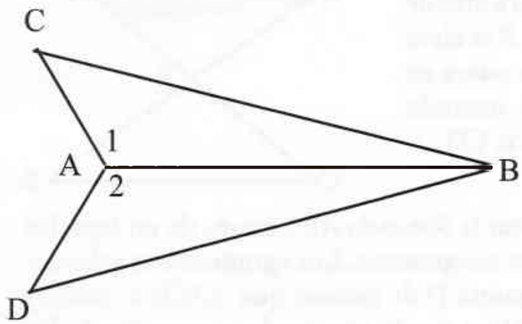
2. $\angle A = \angle P$

3. $BC = QR$

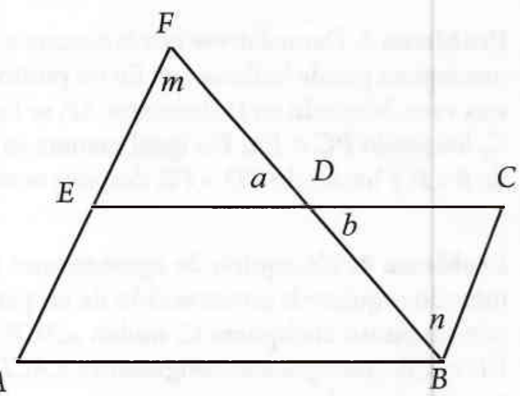


En cada uno de los ejercicios siguientes, utiliza la información proporcionada, para escribir una demostración de párrafo, que pruebe por qué cada igualdad es verdadera. Antes de plantear tu demostración, debes escribir en forma de flujo, el razonamiento que seguiste.

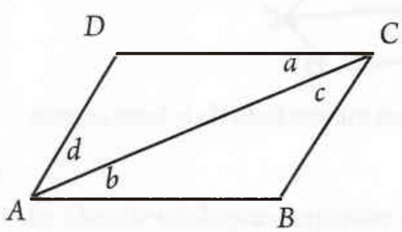
4. **Datos:** $\angle 1 = \angle 2$ y $\overline{AB}$ es bisectriz de $\angle CBD$.
¿$BC = BD$? ¿Por qué?



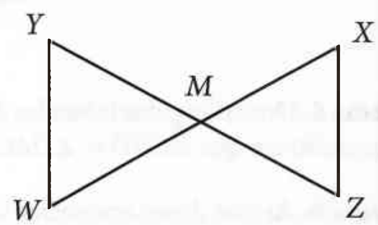
7. **Datos:** $FD = DB$ y $AF // BC$
¿$FE = BC$? ¿Por qué?



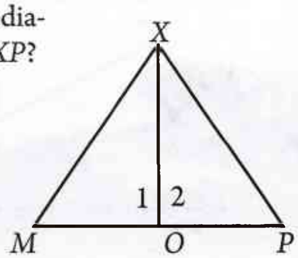
5. **Datos:** $\overline{AD} // \overline{BC}$ y $\overline{AB} // \overline{DC}$
¿$AB = DC$? ¿Por qué?



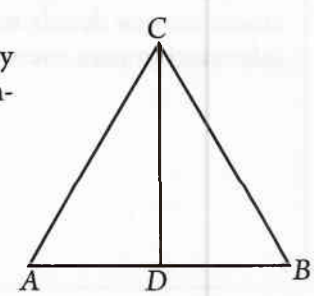
8. **Datos:** M es el punto medio de $\overline{WX}$ y $\overline{YZ}$
¿Es $YW = ZX$? ¿Por qué?



6. **Datos:** $\overline{XO}$ es mediatriz de $\overline{MP}$ ¿$XM = XP$? ¿Por qué?



9. ΔABC es isósceles y $\overline{CD}$ es bisectriz del ángulo del vértice
¿Es $AD = BD$?
¿Por qué? ___________

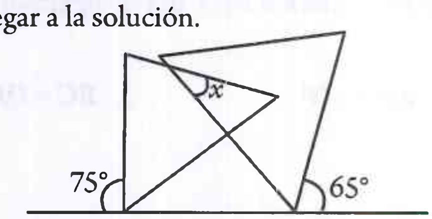


EXAMEN 2 (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 4.3, 2 y 4.

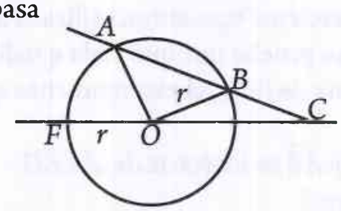
INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. En la figura, ambos triángulos son equiláteros. Hállese la medida de x, en grados.

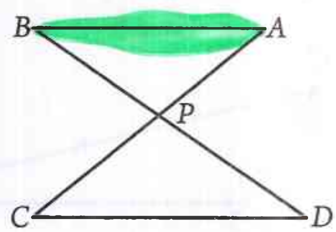


Problema 2. Dado un círculo con centro O y radio r, y una cuerda AB; se toma el punto C sobre la recta AB de tal manera que $BC = r$, se traza la recta CF que pasa por el centro de la circunferencia.

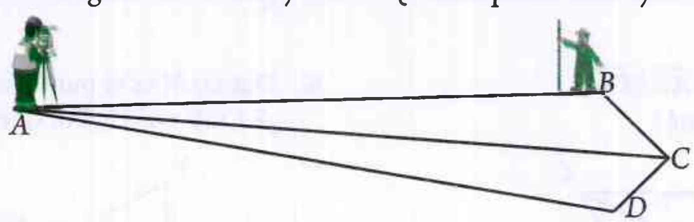
Demuestra que $\angle BOC = \frac{1}{3}\angle AOF$



Problema 3. Demuéstrese que la distancia AB de un lado a otro de una laguna puede hallarse así: En un punto conveniente P se clava una vara. Mirando en la dirección AP, se hace clavar una estaca en C, haciendo $PC = PA$. De igual manera se determina D, mitando de B a P, y haciendo $PD = PB$. después se mide la distancia CD.

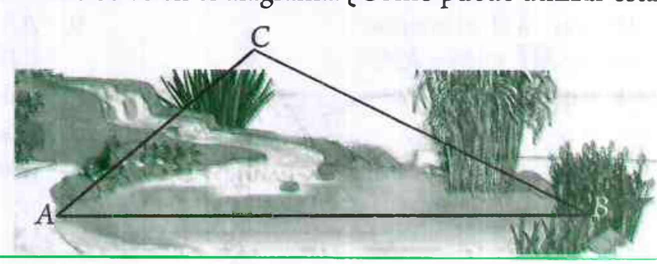


Problema 4. Un equipo de agrimensores desea encontrar la distancia AB a través de un lago. Un método requiere la construcción de un par de triángulos congruentes. Los agrimensores seleccionan un punto cualquiera C, miden $\angle ACB$ y ubican un punto D de manera que $\angle ACD = \angle ACB$ y $CD = CB$. ¿por qué son congruentes $\angle ACD$ y $\angle ACB$? ¿Cómo puede esto ayudar a encontrar la distancia requerida?

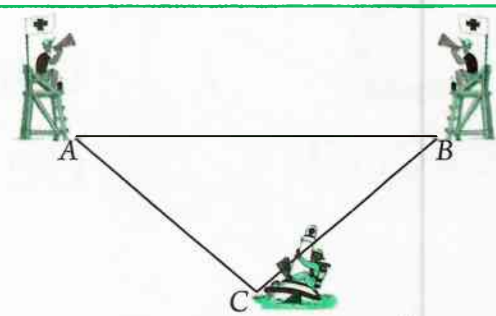


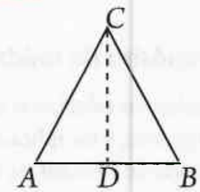
Problema 5. Dos triángulos isósceles ABC, ABD se construyen de un mismo lado de la base común AB. Demuéstrese que $\angle CBD = \angle DAC$.

Problema 6. Ariana desea encontrar la distancia AB a través de un estanque congelado situado en el centro de un campo nivelado. Es demasiado peligroso caminar sobre el hielo para medir la distancia, así que decide medir AC, BC y el $\angle C$ como se vé en el diagrama. ¿Cómo puede utilizar esta información para encontrar AB?

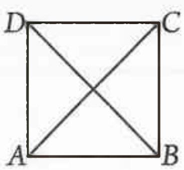


Problema 7. Un salvavidas desea determinar la distancia entre dos estaciones salvavidas y una boya en el mar. El decide medir AC, $\angle A$ y $\angle C$, como se muestra en la figura. ¿Cómo puede utilizarse esta información para encontrar AB y BC?

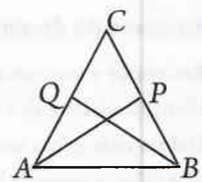




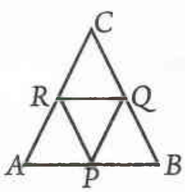
Problema 8. Demostrar que en todo triángulo isosceles los ángulos opuestos a los lados iguales (ángulos de la base) son iguales. (*Sugerencia:* traza la altura del ángulo del vértice y utiliza tus conocimientos sobre congruencia de triángulos).



Problema 9. Si $AB = BC = CD = DA$, y $\overline{DA} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, Demostrar que $AC = BD$.



Problema 10. En el triángulo ABC, $\angle A = \angle B$, y $\angle BAP = \angle ABQ$. Demuéstrese que $AP = BQ$.



Problema 11. En esta figura, P, Q, R son los puntos medios de los lados del triángulo equilátero ABC. Demuéstrese que el triángulo PQR es equilátero

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Autoevaluación

Saber ser: Emociones

1. Escribe las dos cosas más importantes de matemáticas que hayas aprendido al día de hoy.
2. Escribe un problema particular que te haya parecido difícil.
3. ¿En qué te gustaría tener más ayuda?
4. En este momento, ¿cómo te sientes en tu clase de matemáticas? (Señala las palabras que se apliquen).

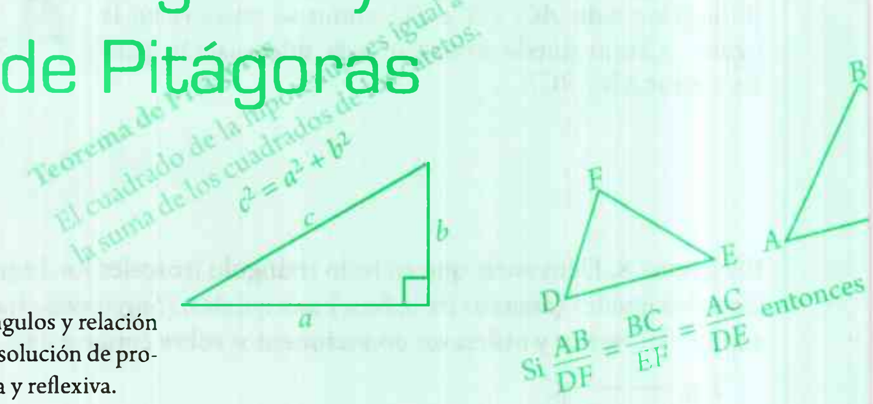
a.	Interesado	[ ]	b.	Relajado	[ ]	c.	Preocupado	[ ]
d.	Exitoso	[ ]	e.	Confundido	[ ]	f.	Inteligente	[ ]
g.	Feliz	[ ]	h.	Aburrido	[ ]	i.	Apremiado	[ ]

j. Escribe tu propio estado de ánimo. ______________________________

5. En este momento, ¿cuál es la mayor preocupación que afecta tu trabajo de matemáticas?
6. ¿Cómo podríamos mejorar las clases de matemáticas?

3 unidad

Semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras



Propósito de unidad

Analiza las relaciones de semejanza de triángulos y relación pitagórica, y las aplica en la modelación y resolución de problemas de su entorno, de una manera crítica y reflexiva.

Indicadores de desempeño

- Reconoce y usa razones y proporciones en contextos diversos.
- Identifica triángulos semejantes y la proporcionalidad entre sus lados homólogos.
- Define triángulos semejantes.
- Identifica y enuncia los criterios de semejanza *AA, LAL* y *LLL.*
- Utiliza las tecnologías de la información, para explorar triángulos semejantes y criterios de semejanza.
- Aplica los criterios de semejanza (*AA, LAL, LLL*) para verificar la semejanza de triángulos.
- Aplica triángulos semejantes en la determinación indirecta de distancias.
- Aplica la media proporcional (o geométrica) para resolver problemas.
- Aplica el teorema de Tales y el teorema de Pitágoras y su recíproco, en la resolución de problemas

Competencias disciplinares a evaluar

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Atributos de Competencias genéricas a evaluar

5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.
7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
8.1 Plantea problemas y ofrece alternativas de solución al desarrollar proyectos en equipos de trabajo, y define un curso de acción con pasos específicos.

Actividad preliminar

¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

Los siguientes términos se utilizarán en la actividad que realizarás a continuación; léelos atentamente.

- Iteración es el proceso de repetir el mismo procedimiento varias veces.
- Un fractal es una figura geométrica que se construye utilizando iteración.

A continuación construirás dos tipos de fractales, uno denominado triángulo de Sierpinsky y el otro, conocido como curva de Koch.

3 unidad

Actividad 1

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Autoevaluación

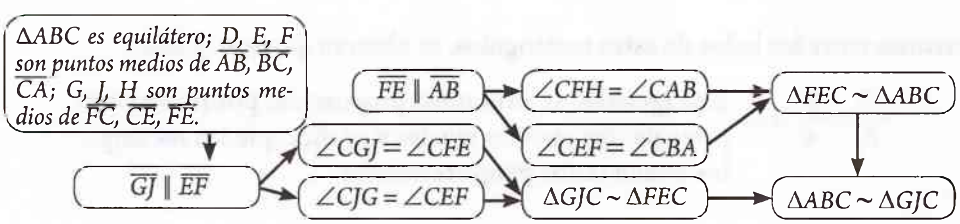
a) Utiliza tus conocimientos para realizar lo indicado:
Etapa 0: Dibuja un triángulo equilátero cuyos lados midan aproximadamente 20 cm.
Etapa 1: Une los puntos medios de cada lado para formar otro triángulo.
Etapa 2: Repite el proceso utilizando los tres triángulos no sombreados.
Une los puntos medios de cada lado para formar otros triángulos.

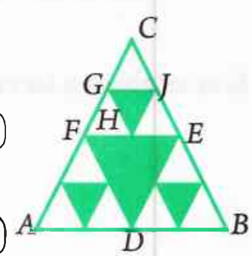
b) Continúa el proceso hasta la etapa 4. ¿Cuántos triángulos no sombreados tienes en la etapa 4?

c) ¿Cuál es el perímetro de un triángulo no sombreado en cada una de las etapas?

d) Si continúa el proceso indefinidamente, ¿qué pasaría con el perímetro de cada triángulo no sombreado?

e) Analiza el siguiente diagrama en flujo que muestra la utilización de algunos conocimientos que estudiarás en esta unidad. La implicación que lleva a $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$ *y* $\overline{GJ} \parallel \overline{EF}$, la estudiarás hasta la unidad de polígonos. El diagrama describe el razonamiento que lleva a la demostración de que: *un triángulo formado en la etapa 2 del triángulo de Sierpinski es semejante al triángulo formado en la etapa 0.*

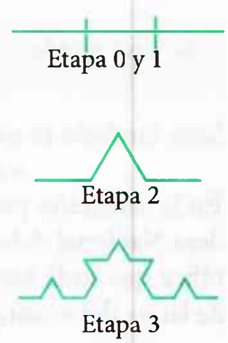




f) Para generar otras imágenes fractales haz lo siguiente:
Etapa 0 y 1: Dibuja un segemento de cualquier longitud y trisécalo.
Etapa 2: Reemplaza la mitad del segmento con dos segmentos de la misma longitud del segmento que se quitó.
Etapa 3: Repite el proceso en cada uno de los cuatro segmentos de la etapa 3, después continúa repitiendo el proceso.

La imagen de fractales producidos por este proceso se denomina curva de Koch.

g) Construye curvas de Koch en cada uno de los lados un triángulo equilátero; realiza cuatro etapas (la etapa 0 es el dibujo del triángulo).



3.1 Razones y proporciones

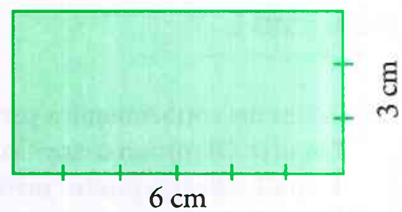
Lee con atención y contesta correctamente.

Los lados de la Bandera Nacional están en **proporción** cuatro a siete. No importa de que tamaño se haga, deben mantenerse dichas proporciones. Dibuja en tu cuaderno dos banderas nacionales de diferente tamaño.

A continuación, recordarás el significado de razón y proporción.

Una **razón** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$,

donde a y b son números reales que están expresados en las mismas unidades. En otras palabras, una razón es la comparación de dos cantidades por cociente. Algunas veces esta razón se escribe $a{:}b$ y se lee: «a es a b».



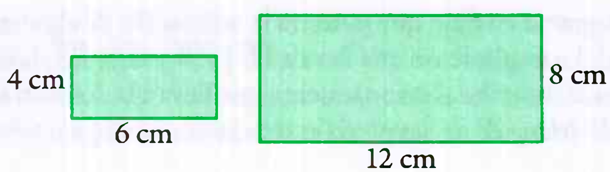
Por ejemplo, el rectángulo de la derecha tiene 6 cm de largo por 3 cm de ancho; por lo tanto, la razón de la longitud a la anchura es:

$\frac{6}{3}$ o $6 : 3$ y se lee «6 es a 3».

Ésto significa que la longitud mide el doble que el ancho.

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

Por ejemplo, considérense los siguientes rectángulos:



Si se establecen las razones entre los lados de estos rectángulos, se observa que son iguales:

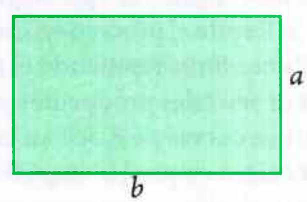
$\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$ ← Esta igualdad se denomina proporción, porque se compone de dos razones iguales y se dice que los rectángulos tienen **lados proporcionales.**

Se dice que las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **proporcionales** o **están en proporción** si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0, d \neq 0$.

Esto, también se escribe $a{:}b = c{:}d$ y se lee

«a es a b como c es a d».

En la situación problema inicial, se indica que toda Bandera Nacional debe estar en proporción 4 por 7. Esto significa que toda bandera con dimensiones a de ancho y b de largo, debe cumplir la siguiente proporción:



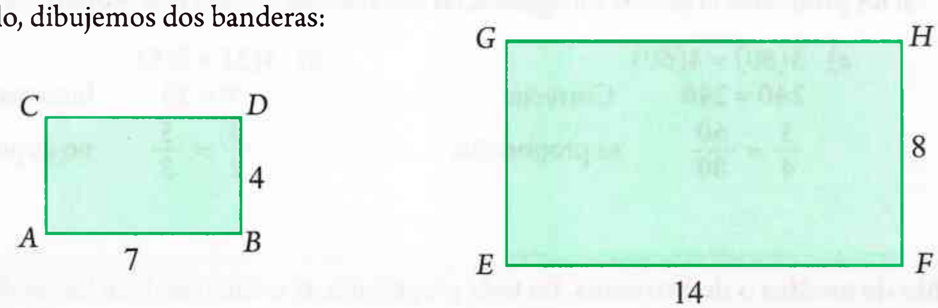
$$\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$$

¿Cómo se mantiene esta proporción? Multiplicando o dividiendo tanto el numerador como el denominador por la misma cantidad. Así, una bandera puede ser de 2 por 3.5 o de 8 por 14.
Lo anterior significa que si dibujamos dos o más banderas, sus lados son respectivamente proporcionales.

Lee con atención el significado de segmentos proporcionales.

Dos segmentos son **proporcionales** a otros dos cuando las razones de sus medidas son iguales.

Por ejemplo, dibujemos dos banderas:



Si dividimos cada lado de la bandera de la izquierda con el lado respectivo de la bandera de la derecha obtenemos:

Por lo tanto:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{\cancel{7}}{\cancel{14}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BD}{FH} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BD}{FH}$$ (Esta expresión significa que los lados involucrados son proporcionales)

Contesta correctamente

1, 2, 3, 4 ¿son proporcionales a 3, 6, 9 y 12? ¿Por qué?

Lee con atención.

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,
las cantidades a y d se llaman **extremos** de la proporción y c y b se llaman **medios** de la proporción.

$$a : \underbrace{b = c}_{\text{Medios}} : d$$

Extremos

Estudia a continuación, las propiedades de las proporciones.

Propiedad fundamental. En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$

La propiedad fundamental, puede utilizarse para verificar si dos razones forman una proporción:

Ejemplo

Comprueba si las siguientes razones forman una proporción

a) $\frac{3}{4} = \frac{60}{80}$ b) $\frac{3}{2} = \frac{5}{3}$

Solución

Si los productos cruzados son iguales, las dos razones forman una proporción

a) $3(80) = 4(60)$

$240 = 240$ Correcto.

$\frac{3}{4} = \frac{60}{80}$ es proporción.

b) $3(3) = 2(5)$

$9 = 10$ Incorrecto.

$\frac{3}{2} = \frac{5}{3}$ no es proporción.

Intercambio de medios o de extremos. En toda proporción, si se intercambian los medios o los extremos, la proporción se mantiene.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. O bien: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

Invertir razones. En toda proporción, pueden invertirse las razones.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Para el despeje de incógnitas, el producto cruzado es el que más se usa.

Ejemplo

Hallar x en cada una de las siguientes proporciones:

a) $\frac{3}{4} = \frac{15}{x}$ b) $\frac{27}{x} = \frac{x}{3}$

Solución

a) $\frac{3}{4} = \frac{15}{x}$

$3(x) = 4 \times 15$

4×15

$x = \frac{4 \times 15}{3}$

$x = 20$

b) $\frac{27}{x} = \frac{x}{3}$

$27 \times 3 = (x)(x)$

$x^2 = 81$

$x = \sqrt{81}$

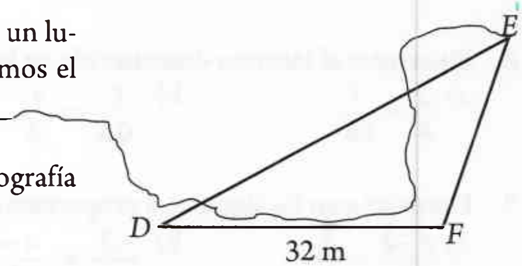
$x = 9$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

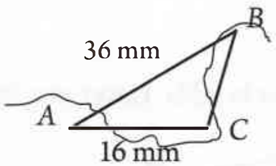
Actividad 2

A) Lee con atención.

Imaginemos que el dibujo de la derecha, es realmente un lugar de la Tierra que estamos observando y que trazamos el triángulo DFE para determinar la distancia DE.



Ahora, supongamos que el siguiente dibujo es una fotografía tomada del lugar. ¿Cuánto mide DE?



La fotografía es un dibujo a escala. Una ***escala***, se define como la *proporción* entre la magnitud dibujada de un objeto respecto a a su magnitud real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Magnitud en el dibujo}}{\text{Magnitud en la realidad}}$$

Por lo tanto, la escala del dibujo anterior es: $\text{Escala} = \dfrac{16\text{ mm}}{32\text{ m}} = \dfrac{16\text{ mm}}{32000\text{ mm}} = \dfrac{1}{2000}$

Cualquier cociente entre segmentos correspondientes debe formar una proporción con la escala.

Entonces: $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{1}{2000}$

Sustituyendo el valor de AB: $\dfrac{36\text{ mm}}{DE} = \dfrac{1}{2000}$

b) Ahora, despeja DE:

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

3.1 EJERCICIOS

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

2. Completa correctamente.

   a) Se da el nombre de proporción a la igualdad que se establece entre ____________________

   b) En toda proporción la igualdad que se establece entre el producto de los medios y el producto de los extremos se conoce como ____________________

   c) En la proporción: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{MN}{PO}$, intercambia los medios ____________________

   d) En la proporción: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{MN}{PO}$, intercambia los extremos ____________________

   e) En la proporción: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{MN}{PO}$, invierte las razones. ____________________

3. Expresa en forma de cociente las siguientes razones.

   a) 27 es a 9 b) 120 es a 180 c) 1 es a 0.25 d) 9 es a 4.2

4. Forma una proporción con los números 54, 10, 18 y 30.

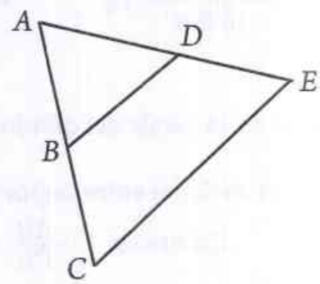
5. Comprueba si forman una proporción:
a) $\frac{3}{4} = \frac{60}{80}$ b) $\frac{9}{10} = \frac{4.5}{5}$ c) $\frac{5}{6} = \frac{2.5}{3}$

6. Encuentra el término desconocido en las proporciones siguientes:
a) $\frac{2}{4} = \frac{?}{28}$ b) $\frac{?}{0.5} = \frac{4}{2}$ c) $\frac{30}{100} = \frac{1.5}{?}$ d) $\frac{0.75}{?} = \frac{2.5}{10}$

7. Despejar x en las siguientes proporciones.
a) $\frac{x-2}{x} = \frac{3}{4}$ b) $\frac{-3}{x} = \frac{x-8}{5}$ c) $\frac{3x-1}{4} = \frac{1}{8}$

8. En la figura de la derecha $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$ utiliza proporciones para completar la tabla. Hacer una figura para los datos de cada renglón.

AB	BC	AD	DE	AC	AE
5	8		10		
	14		23		32
		12		16	20
		17	17	33	



PROBLEMARIO INTERMEDIO

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de problemas resueltos sobre modelización matemática
- *Competencia o atributo a evaluar:* 7.3, 1 y 3

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. Supongamos que una receta para 50 porciones de sopa incluye los siguientes ingredientes: 30 litros de agua, 1/2 taza de pimienta, 1.5 kilogramos de lentejas, 2.5 pollos, 1.5 kilogramos de cebolla y 170 gramos de salsa picante. ¿Qué cantidad de cada uno de los ingredientes se requiere para elaborar 250 porciones?

Problema 2. La Tierra tiene un diámetro aproximado de 12,732 km y se encuentra casi a 386,160km de la Luna, cuyo diámetro aproximado mide 3540 km. En un dibujo a escala de la Tierra y la Luna, esta última se representa con un círculo de 1 cm de diámetro. ¿Cuál es el diámetro de la Tierra y a qué distancia se encuentra de la Luna en dicho dibujo?

Problema 3. Se dibuja a escala una casa, de modo que 2/3 cm en el dibujo representa 46 cm del tamaño real de la casa. Si el largo de la casa es de 2.5 m y el ancho mide 1 m, ¿cuáles son las dimesiones?

Problema 4. Un fabricante dibuja a escala un tornillo: 1 cm del dibujo representa 3 mm del tornillo real. Si el largo del tornillo en el dibujo es de 35 cm, ¿cuánto mide de largo el tornillo real?

Problema 5. Un mapa está en escala de manera que 1 cm representa 15 km. ¿Qué tan lejos están dos pueblos si están separados 7.9 cm en el mapa?

Problema 6. Un jet bimotor tiene una longitud de 78 metros y un ala de 90 metros; si el modelo a escala está hecho con un ala de 36 cm, halla su longitud.

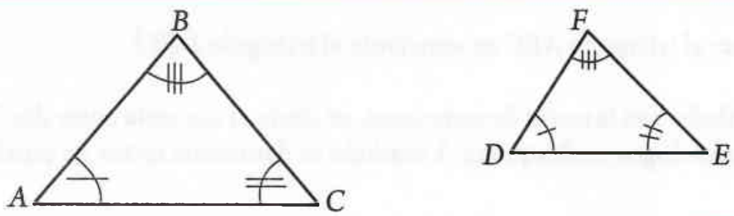
3.2 Definición de triángulos semejantes

Lee con atención.

Una figura a escala, tiene la misma forma que la original pero diferente tamaño. Sin embargo, *las medidas están en proporción.* Al igual que se usa el término "*figuras congruentes*", para describir dos figuras que tienen exactamente la misma forma y tamaño, se usa el término "*figuras semejantes*", para describir figuras que tienen la misma forma pero distinto tamaño, siempre y cuando sus elementos estén en proporción. Así, si se dispone de un mapa a escala, entonces la figura del mapa es semejante a la figura que representa. En este apartado estudiaremos los triángulos semejantes.

Lee con atención la definición de lados homólogos:

Lados homólogos (o correspondientes) son lados que se oponen a ángulos iguales, o lados comprendidos entre ángulos iguales.

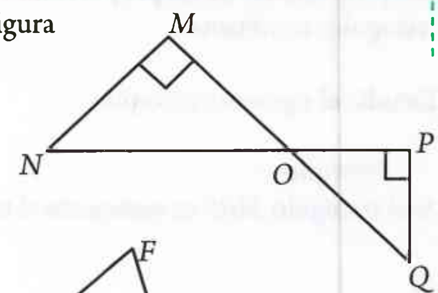


El homólogo de $\overline{AB}$ es $\overline{DF}$
El homólogo de $\overline{AC}$ es $\overline{DE}$
El homólogo de $\overline{BC}$ es $\overline{FE}$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

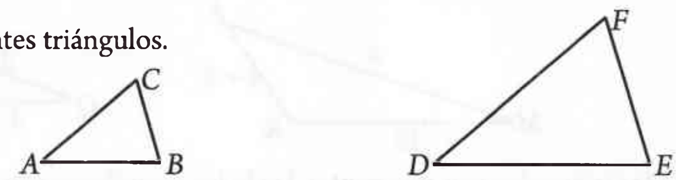
Actividad 3

a) **Determina** las parejas de lados homólogos en la siguiente figura (primero debes poner marcas iguales a los ángulos iguales).



El homólogo de $\overline{MN}$ es _______
El homólogo de $\overline{MO}$ es _______
El homólogo de $\overline{NO}$ es _______

b) **Observa** los siguientes triángulos.



c) **Compara los ángulos de uno con los del otro.** Puedes calcar uno de los triángulos en un pedazo de hoja suelta y superponerlo en el otro triángulo o medir cada ángulo con un transportador.

$\angle A = \angle$_____
$\angle B = \angle$_____
$\angle C = \angle$_____

Conclusión: Los triángulos tienen tres ángulos respectivamente____

d) Ahora, **mide con precisión milimétrica** cada uno de los lados y completa las siguientes razones:

$\dfrac{DE}{AB} =$ $\qquad$ $\dfrac{FE}{BC} =$

$\dfrac{DF}{AC} =$

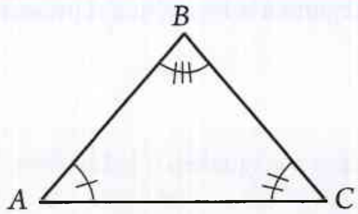
Los triángulos tienen lados homólogos____________________ los lados del segundo triángulo miden el ________ que sus lados homólogos del primero.

En resumen, los dos triángulos de la actividad cumplen con dos condiciones:

1. Tienen sus tres ángulos respectivamente___________
2. Sus lados homólogos son _______________________

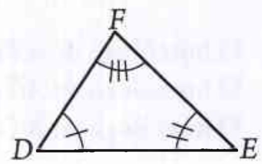
Lee con atención:

Diremos entonces, que **dos triángulos son semejantes,** si sus ángulos respectivos son iguales, y sus lados homólogos son proporcionales. La semejanza se representa por el símbolo ~ .



Si $\angle A = \angle D, \angle B = \angle F, \angle C = \angle E$ y $\dfrac{AB}{DF} = \dfrac{AC}{DE} = \dfrac{BC}{FE} = k,$

entonces $\Delta ABC \sim \Delta DFE$



(Se lee: el triángulo *ABC* es semejante al triángulo *DFE*)

El símbolo *k* es la razón de semejanza, es decir, el cociente entre dos lados homólogos cualesquiera; *k* también se denomina factor de escala.

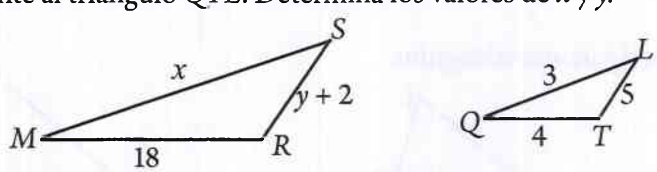
Debemos observar que los triángulos congruentes o iguales tienen igual forma e igual tamaño, pero los trtiángulos semejantes tienen igual forma pero no necesariamente igual tamaño.

Las propiedades de las proporciones se pueden utilizar para resolver problemas que tengan que ver con triángulos semejantes.

Estudia el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Si el triángulo *MRS* es semejante al triángulo *QTL*. Determina los valores de *x* y *y*.



Solución

Ya que los triángulos son semejantes, los lados homólogos son proporcionales. De este modo, podemos escribir proporciones para encontrar los valores de *x* y *y*.

Escribe una proporción tal que involucre números y la variable *x*.

a) $\dfrac{MR}{QT} = \dfrac{MS}{QL}$

$\dfrac{18}{4} = \dfrac{x}{3}$

$54 = 4x$

$13.5 = x$

Escribe una proporción tal que involucre números y la variable *y*.

b) $\dfrac{MR}{QT} = \dfrac{RS}{TL}$

$\dfrac{18}{4} = \dfrac{y+2}{5}$

$90 = 4y + 8$

$82 = 4y$

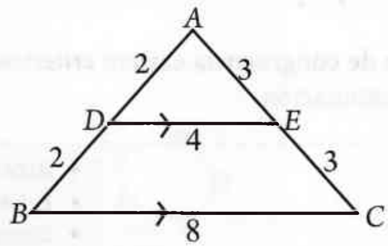
$20.5 = y$

3.2 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

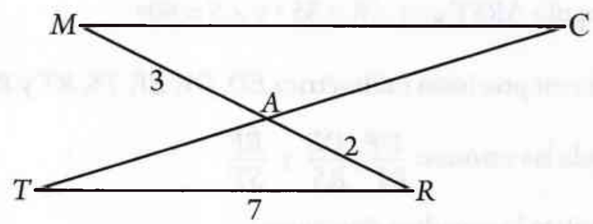
1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

2. En la siguiente figura decide si $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. Justifica tu respuesta.

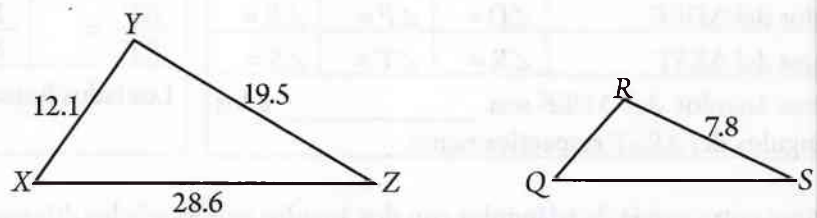


En cada una de las siguientes figuras, calcula la longitud de los segmentos indicados. Todas las medidas están en centímetros.

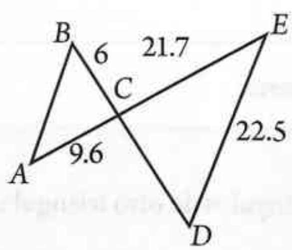
3. $\Delta TAR \sim \Delta MAC$
   $MC =$ _______



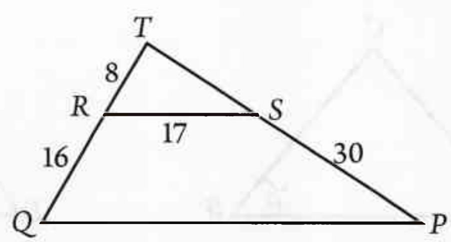
4. $\Delta XYZ \sim \Delta QRS$
   $QR =$ _____
   $QS =$ ______



5. $\Delta ABC \sim \Delta EDC$
   $CD =$ _____
   $AB =$ ______



6. $\Delta TRS \sim \Delta TQP$
   $TS =$ _____
   $QP =$ ______



3.3 Criterios de semejanza

Lee con atención:

La definición de semejanza exige dos cosas:

1) Los ángulos respectivos deben ser iguales, y
2) Los lados homólogos deben ser proporcionales.

Pero, de manera análoga al concepto de congruencia existen criterios para determinar la semejanza de triángulos, los cuales explorarás a continuación.

Utiliza GeoGebra

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 4

a) Dibuja dos triángulos que tengan dos ángulos iguales (AA). Puedes usar el Geogebra.
Triángulo ΔDEF con $\angle D = 35°$ y $\angle E = 80°$
Triángulo ΔRST con $\angle R = 35°$ y $\angle S = 80°$

b) Mide con precisión milimétrica ED, DF, EF, TS, RT y RS.

c) Calcula las razones: $\frac{DF}{RT}, \frac{DE}{RS}$ y $\frac{EF}{ST}$

d) Completa los cuadros siguientes:

Ángulos del ΔDEF	$\angle D =$	$\angle F =$	$\angle E =$
Ángulos del ΔRST	$\angle R =$	$\angle T =$	$\angle S =$
Los tres ángulos del ΔDEF son ______________ a los tres ángulos del ΔRST respectivamente.			

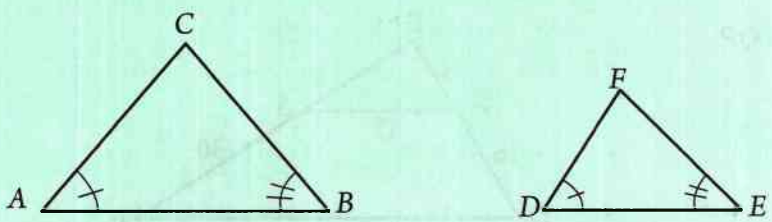
$\frac{DF}{RT} =$	$\frac{DE}{RS} =$	$\frac{EF}{ST} =$
Los lados homólogos son __________		

e) Dibuja otra pareja de triángulos con dos ángulos iguales y lados diferentes. Repite un cuadro parecido al anterior. ¿Será que todas las parejas de triángulos con dos ángulos iguales tienen lados homólogos proporcionales?

La actividad de exploración sugiere el siguiente criterio:

Criterio de semejanza *AA* (*ángulo-ángulo*)
Si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

Si $\angle A = \angle D$ y $\angle B = \angle E$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



Una conclusión importante de ésto, es que, automáticamente los lados son proporcionales. Es decir, podemos asegurar que:

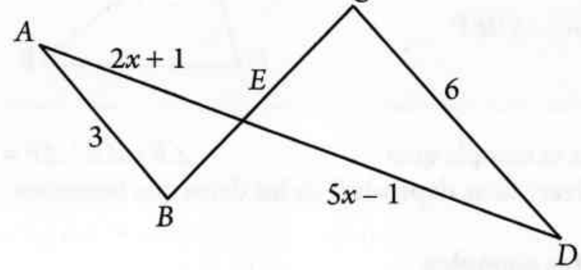
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Ejemplo

Dado:

$\overline{AB} // \overline{CD}$, $AB = 3$, $AE = 2x + 1$,
$CD = 6$ y $ED = 5x - 1$

Determina AE y DE.



Solución

Puesto que $\overline{AB} // \overline{CD}$, se cumple que $\angle A = \angle D$ y $\angle B = \angle C$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas. Por lo tanto, $\Delta ABE \sim \Delta DCE$ por el criterio AA. Entonces podemos plantear la proporcionalidad entre lados homólogos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}$$

$\frac{3}{6} = \frac{2x+1}{5x-1}$	Por sustitución
$3(5x-1) = 6(2x+1)$	Productos cruzados
$15x - 3 = 12x + 6$	Propidad distributiva
$3x = 9$	Sustrae $12x$ y suma 3 a cada lado.
$x = 3$	Divide cada lado por 3.

$AE = 2x + 1$
$\quad = 2(3) + 1 = 7$

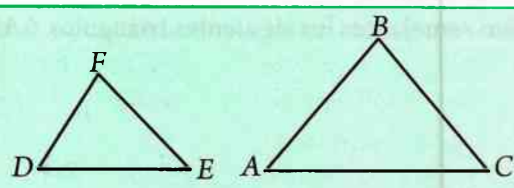
$ED = 5x - 1$
$\quad = 5(3) - 1 = 14$

Existen dos criterios más de semejanza

Criterio de semejanza *LLL* (*lado-lado-lado*)

Si las medidas de los lados homólogos de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Si $\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DE}$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta DFE$

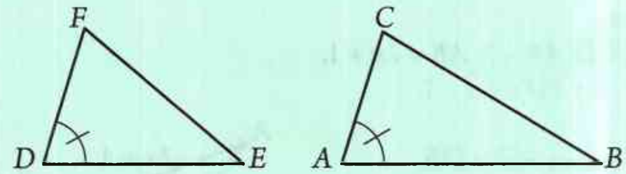


Una conclusión importante de ésto, es que, automáticamente los ángulos son iguales. Es decir, podemos asegurar que: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle F$ y $\angle C = \angle E$.

Criterio de semejanza *LAL*
(lado-ángulo-lado)

Si dos lados de un triángulo son proporcionales a dos lados de otro triángulo y los ángulos comprendidos entre estos lados son iguales, entonces los triángulos son semejantes.

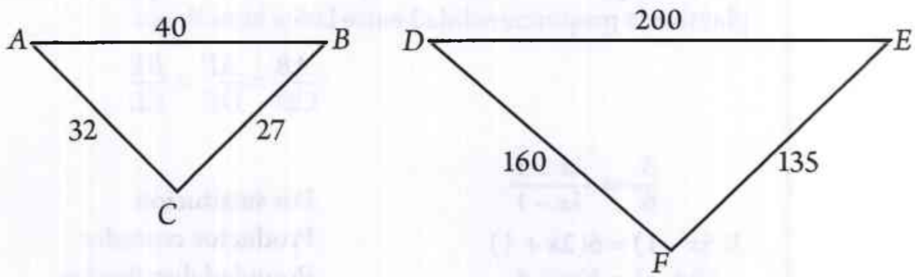
Si $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ y $\angle A = \angle D$,
entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



En forma automática se cumple que: $\angle E = \angle B,\ \angle F = \angle C$ y $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$
¿Cuál postulado utilizar? Ésto, dependerá de los datos que tengamos.

Estudia los siguientes ejemplos

Ejemplo 1
¿Son semejantes los siguientes triángulos?



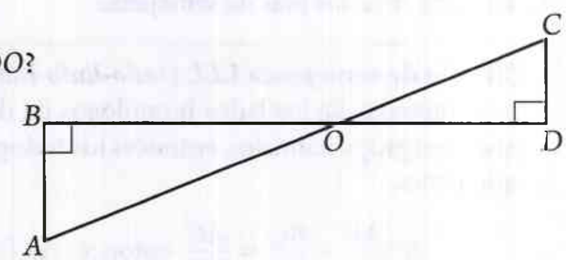
Solución

¿Cuál postulado investigar? Observando que no conocemos ningún ángulo debemos investigar el postulado *LLL*. $\frac{40}{200} \stackrel{?}{=} \frac{32}{160} \stackrel{?}{=} \frac{27}{135}$

Simplificando obtenemos: $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

Por tanto, los triángulos sí son semejantes por el criterio *LLL*

Ejemplo 2
¿Son semejantes los siguientes triángulos ΔABO y ΔCDO?



Solución

¿Cuál postulado investigar? Aquí no conocemos ningún lado. Debemos entonces investigar el postulado *AA*.

$\angle B = \angle D$ porque ambos son rectos; $\angle BOA = \angle DOC$ por ser opuestos por el vértice.
Por tanto: $\Delta ABO \sim \Delta CDO$ por el postulado *AA*.

3.3 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

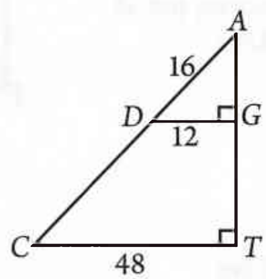
1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

2. ¿Son semejantes todos los triángulos isósceles? ¿Por qué? Haz un dibujo.

3. ¿Son semejantes todos los triángulos rectángulos? ¿Por qué? Haz un dibujo.

4. ¿Son semejantes dos triángulos isósceles que tienen sus ángulos del vértice iguales? ¿Por qué?

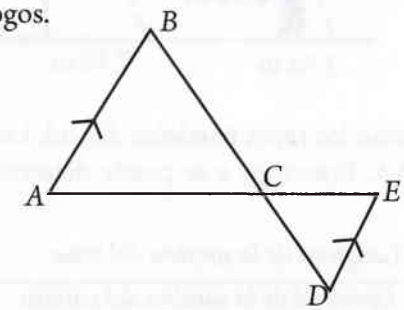
Para los ejercicios 5 y 6, utiliza la siguiente figura:



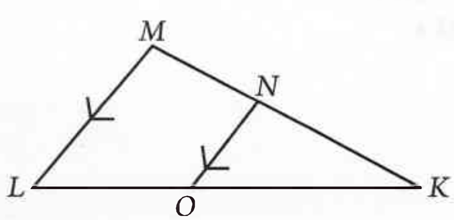
5. Explica por qué ΔCAT y ΔDAG son semejantes.

6. Calcula CA.

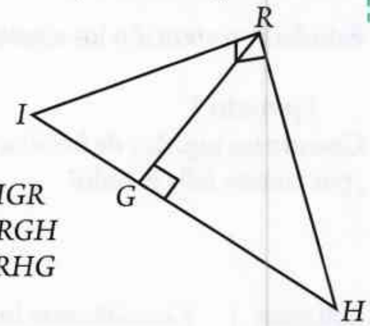
7. Explica por qué ΔABC y ΔEDC son semejantes. Establece la proporcionalidad entre lados homólogos.



8. Explica por qué ΔLMK y ΔONK son semejantes. Establece la proporcionalidad entre lados homólogos.

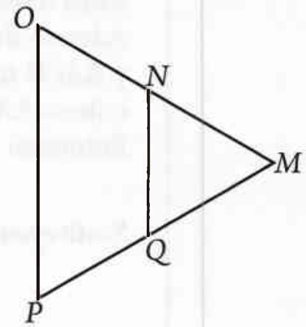


9. Explica por qué cada par de triángulos son semejantes

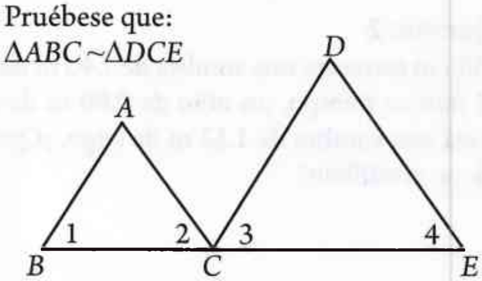


a) ΔIRH y ΔIGR
b) ΔIRH y ΔRGH
c) ΔIRG y ΔRHG

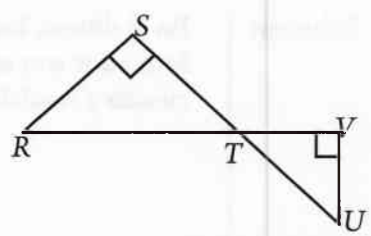
10. Dado $\overline{NQ} // \overline{OP}$
Pruébese que:
$\Delta POM \sim \Delta QNM$



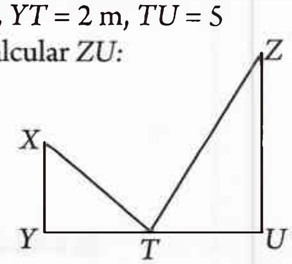
11. Dado $\overline{AB} // \overline{DC}$, $\overline{AC} // \overline{DE}$,
Pruébese que:
$\Delta ABC \sim \Delta DCE$



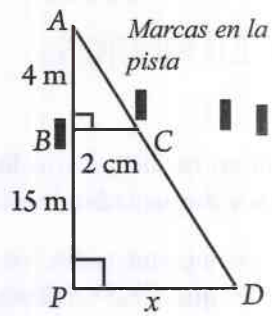
12. Pruébese que:
$$\frac{ST}{TV} = \frac{RT}{TU}$$



13. En la siguiente figura $\overline{XY} \perp \overline{TY}$, $\overline{ZU} \perp \overline{TU}$, $\angle XTY = \angle ZTU$, $YT = 2$ m, $TU = 5$ y $XY = 1.4$ m. Calcular ZU:



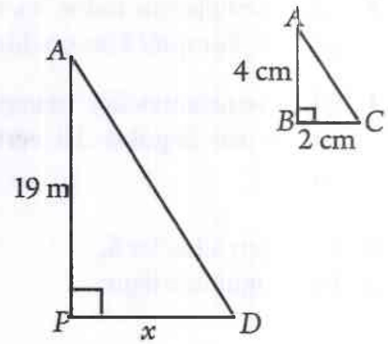
3.4 Medición indirecta con triángulos semejantes



Estudia con atención los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Cuando un jugador de boliche falla una marca de la pista por 2 cm, ¿por cuánto falla el bolo?



Solución

Considérense los triángulos ΔABC y ΔAPD.
Estos triángulos se construyeron rectángulos.
Además de los ángulos rectos, los triángulos ΔABC y ΔAPD tienen el ángulo A común. Entoces, por el criterio AA se concluye que $\Delta ABC \sim \Delta APD$.

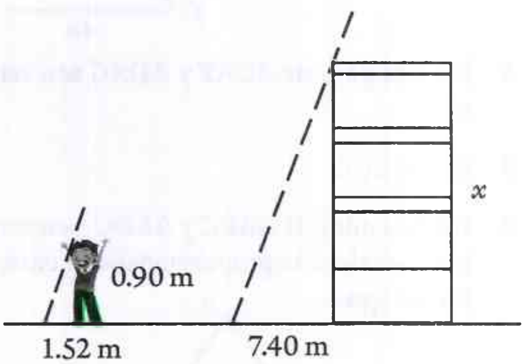
Entonces: $\dfrac{DP}{BC} = \dfrac{AP}{AB}$

Sustituyendo: $\dfrac{x}{2 \text{ cm}} = \dfrac{19 \text{ m}}{4 \text{ m}}$

$$x = \frac{(2 \text{ cm})(19 \text{ m})}{4 \text{ m}} = 9.5 \text{ cm}$$

Ejemplo 2

Un edificio proyecta una sombra de 7.40 m de largo. Al mismo tiempo, un niño de 0.90 m de alto proyecta una sombra de 1.52 m de largo. ¿Qué altura tiene el edificio?



Solución

En el dibujo, las líneas discontínuas muestran los rayos paralelos del sol. Los triángulos formados son semejantes por el criterio AA. Entonces, x se puede determinar estableciendo y resolviendo una proporción.

$$\frac{\textit{Altura del niño}}{\textit{Altura del edificio}} = \frac{\textit{Longitud de la sombra del niño}}{\textit{Longitud de la sombra del edificio}}$$

$$\frac{0.90}{x} = \frac{1.52}{7.40}$$

$$(0.90)(7.40) = (1.52)(x)$$

$$6.66 = 1.52\,x$$

$$\frac{6.66}{1.52} = x$$

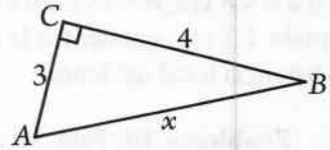
$$4.38 = x$$

El edificio tiene 4.38 m de altura.

PROBLEMARIO INTERMEDIO

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de problemas resueltos sobre modelización matemática
- *Competencia o atributo a evaluar:* 7.3, 1 y 3

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

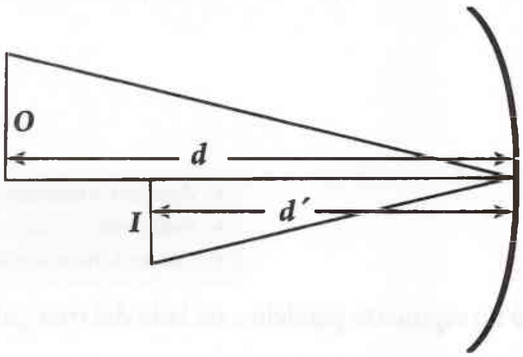


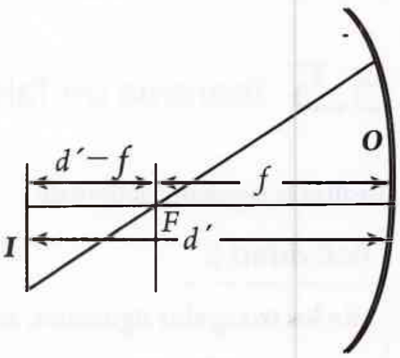
Problema 1. Utilizando tus conocimientos sobre semejanza de triángulos, determina el valor de x en el triángulo adjunto.

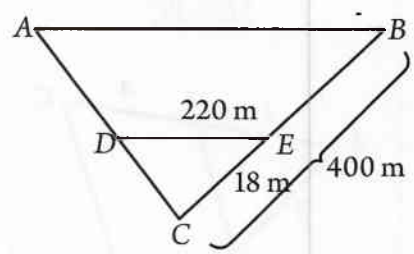
Problema 2. En óptica en el estudio de los espejos, es necesario establecer fórmulas que relacionan el tamaño de la imagen, y el del objeto, con las distancias que recorren los rayos de luz. Estos rayos de luz, forman triángulos semejantes, y la teoría de estos triángulos, permite establecer fórmulas usadas para describir estos fenómenos. Por ejemplo, las siguientes figuras se utilizan para establecer la fórmula de espejos cóncavos para imágenes reales:

Demuestra la siguiente fórmula de los espejos cóncavos para imágenes reales.

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d'}$$







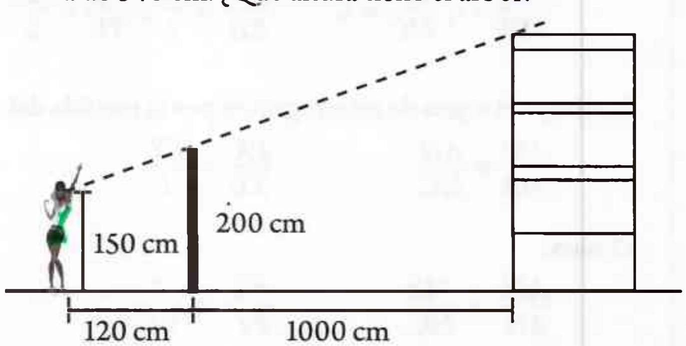
Problema 3. Se desea calcular la longitud AB de un terreno inestable. Para tal fin se trazan los triángulos mostrados de manera que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, y se obtienen las medidas indicadas. Determina AB.

Problema 4. A 1 m 60 cm de un proyector se coloca un objeto de 50 cm. ¿De qué tamaño proyectará su sombra sobre una pantalla que se encuentra a 14 m del proyector?

Problema 5. ¿Cuál es la altura de una torre del campanario de una iglesia si dicha torre proyecta una sombra de 8.4 m y si al mismo tiempo una persona de 1.8 m proyecta una sombra de 0.4m?

Problema 6. A cierta hora del día, una persona de 180 cm de alto, proyecta una sombra de 120 cm. En el mismo instante, un árbol proyecta una sombra de 540 cm. ¿Qué altura tiene el árbol?

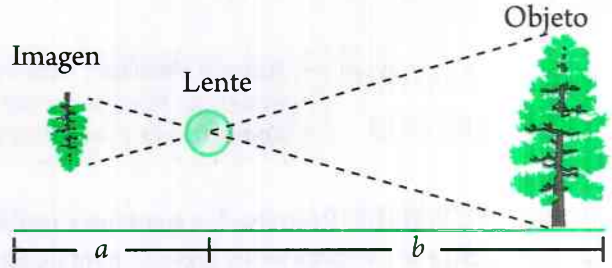
Problema 7. Ana está ubicada a 120 cm de un poste vertical de 200 cm de alto. Cuando levanta la vista, puede ver la parte más alta de un edificio. Ella sabe que el edificio se encuentra a 1000 cm del poste. Sus ojos están a 150 cm del terreno. ¿Cuál es la altura del edificio?



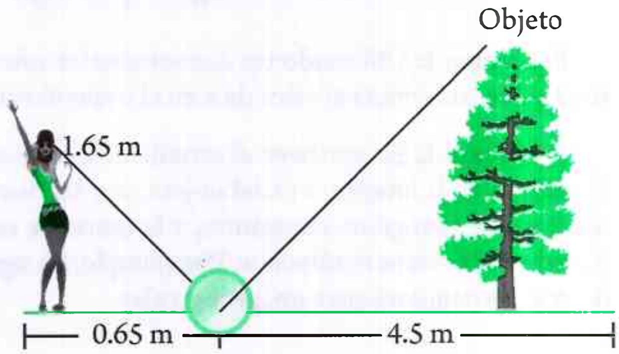
Problema 9. En óptica, la distancia focal c de un lente está dado por la ecuación

$$1/a + 1/b = 1/c,$$

donde a es la distancia del lente a la imagen y b es la distancia del lente al objetivo.
Si $a = 4.8$ cm, $b = 17.7$ cm y la altura de la imagen mide 1.3 cm, encuentra la altura del objeto y la distancia focal del lente.



Problema 10. Para averiguar la altura de un árbol, una muchacha observa la parte más alta de éste en un espejo que se encuentra a 4.5 m del árbol. El espejo está en el piso, con la cara hacia arriba. La muchacha se encuentra a 0.65 m del espejo y la distancia de sus ojos al suelo es aproximadamente 1.65 m. ¿Qué altura tiene el árbol?



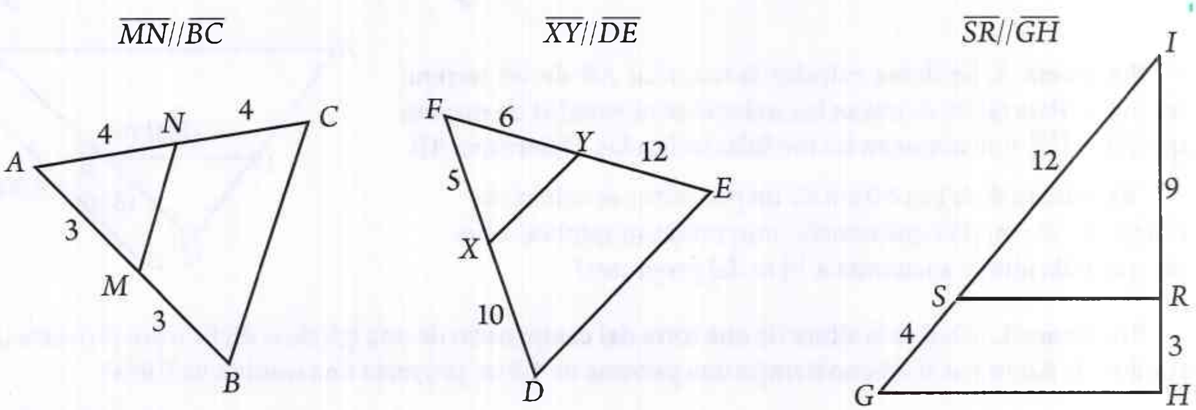
3.5 Teorema de Tales

Realiza la siguiente actividad:

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 5

En los triángulos siguientes, se trazó un segmento paralelo a un lado del triángulo.



Obsérvese que:

$$\frac{AM}{MB} = 1, \ \frac{AN}{NC} = 1, \qquad \frac{FX}{XD} = \frac{1}{2}, \ \frac{FY}{YE} = \frac{1}{2} \qquad \frac{IS}{SG} = \frac{3}{1}, \ \frac{IR}{RH} = \frac{3}{1}$$

Sustituye el signo de interrogación por la medida del segmento que corresponda.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \qquad \frac{FX}{XD} = \frac{FY}{?} \qquad \frac{IS}{SG} = \frac{?}{RH}$$

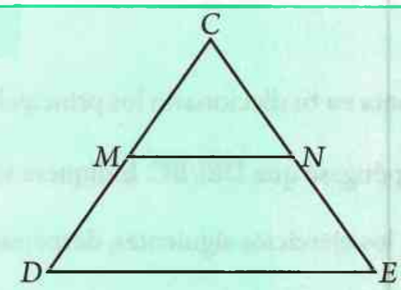
O bien:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC} \qquad \frac{FX}{FY} = \frac{?}{YE} \qquad \frac{IS}{IR} = \frac{?}{?}$$

Estas observaciones se resumen en el teorema siguiente:

Teorema: Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados, entonces divide a éstos proporcionalmente.

Si $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{DE}$, entonces $\dfrac{CM}{MD} = \dfrac{CN}{NE}$

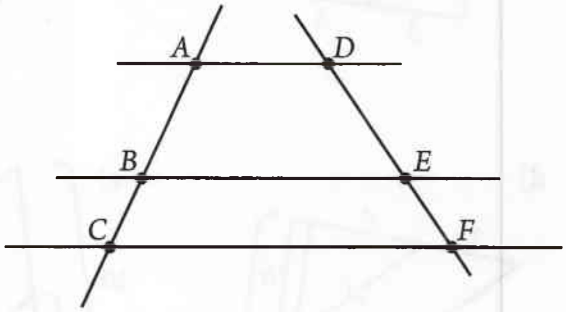


Este teorema es consecuencia de otro más general, cuyo nombre se debe a su creador Tales de Mileto:

Teorema de Tales: Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.

Si $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BE} // \overleftrightarrow{CF}$

Entonces:
$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$ o bien $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$



Estudia los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

En esta figura, $\overline{MN} // \overline{DE}$. Encuéntrese NE.

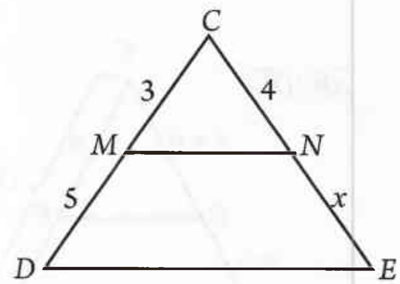
Solución

$\dfrac{CM}{MD} = \dfrac{CN}{NE}$ Por el teorema de Tales.

Por tanto $\dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{x}$

$3x = 20$

$x = \dfrac{20}{3}$



Ejemplo 2

Encuéntrese FJ en esta figura si $\overline{GF} // \overline{KJ}$.

Solución

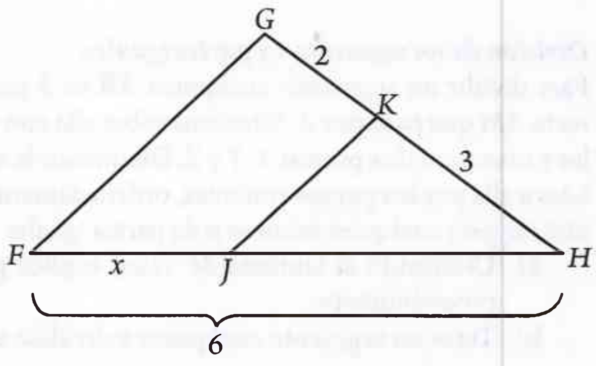
$\dfrac{GK}{KH} = \dfrac{FJ}{JH}$ Por Tales.

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{x}{6 - x}$

$3x = 12 - 2x$

$5x = 12$

$x = \dfrac{12}{5}$

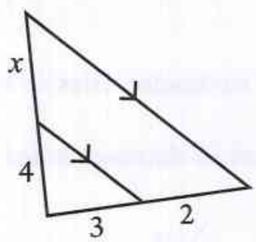


3.5 EJERCICIOS

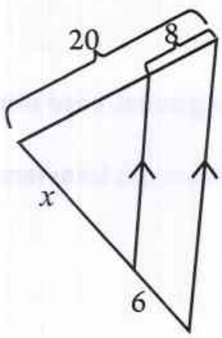
- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.
2. Supóngase que $\overline{DE}//\overline{BC}$. Indíquese si lo siguiente es falso o verdadero.
3. En los ejercicios siguientes, despéjese x.

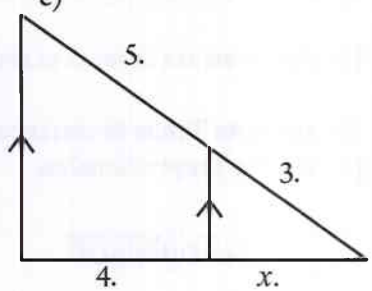
a)



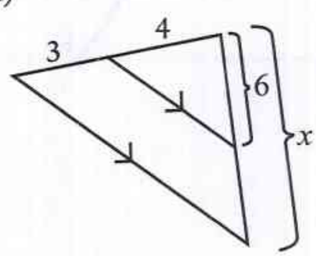
b)



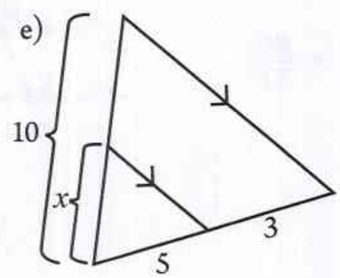
c)



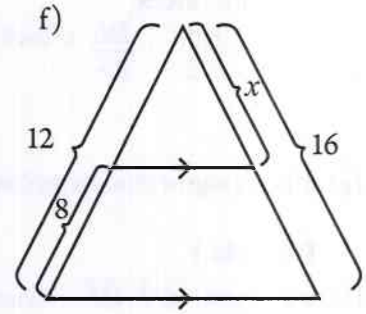
d)



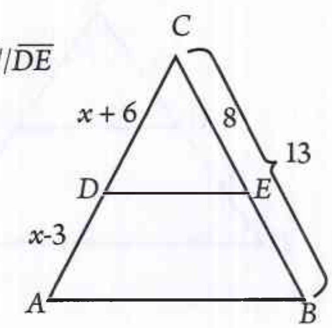
e)



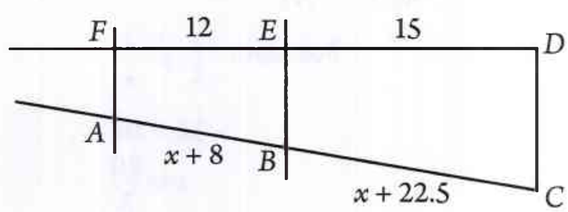
f)



g) $\overline{AB}//\overline{DE}$



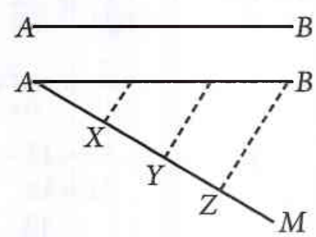
h) $\overline{AF}//\overline{BE}//\overline{CD}$



4. Lee con atención y contesta lo que se pide:

División de un segmento en partes iguales.

Para dividir un segmento cualquiera $\overline{AB}$ en 3 partes iguales, trazamos la recta AM que pase por A. Situamos sobre ella con el compás, 3 partes iguales y marcamos los puntos X, Y y Z. Dibujamos la recta ZB y trazamos paralelas a ella por los puntos restantes, ordenadamente. Este proceso se puede utilizar para cualquier número n de partes iguales. Ahora, contesta:



a) Utilizando el teorema de Tales, explica por qué es correcto este procedimiento.
b) Traza un segmento cualquiera y divídelo en cinco partes iguales.

3.6 Triángulos rectángulos: medias proporcionales y teorema de Pitágoras

Estudia la siguiente definición:

Un número x es una **media proporcional** para dos números a y b si

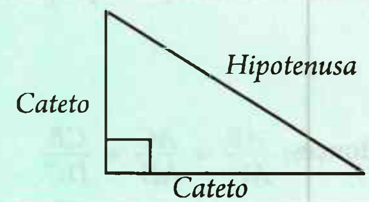
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}, x \neq 0, b \neq 0$$

Por ejemplo, la media proporcional para 4 y 16 es 8, dado que

$$\frac{4}{8} = \frac{8}{16}$$

Recuerda las partes de un triángulo rectángulo.

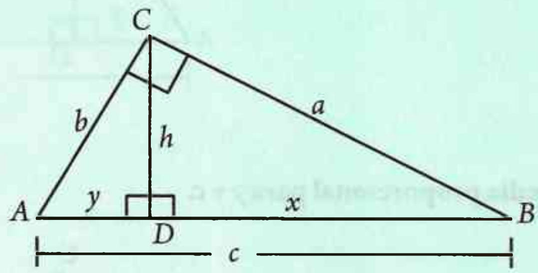
En el **triángulo rectángulo** los lados que determinan el ángulo recto se llaman **catetos,** y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa.**



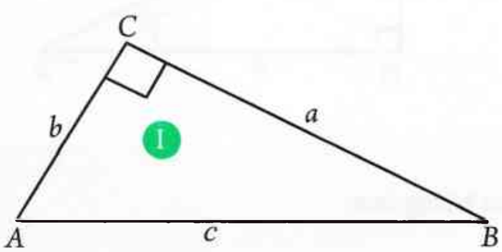
Lee con atención:

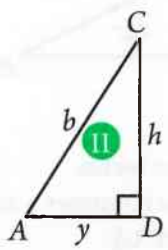
La semejanza de triángulos permite establecer algunas propiedades importantes de los triángulos rectángulos. A continuación estableceremos dos propiedades relacionadas con la altura de un triángulo rectángulo y la media proporcional.

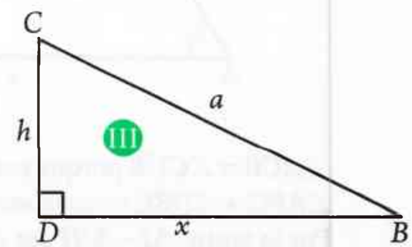
La altura interior de un triángulo rectángulo (segmento CD) divide a éste en dos triángulos semejantes a él y semejantes entre sí.



Estudia a continuación la justificación de este hecho. Separemos los triángulos formados:

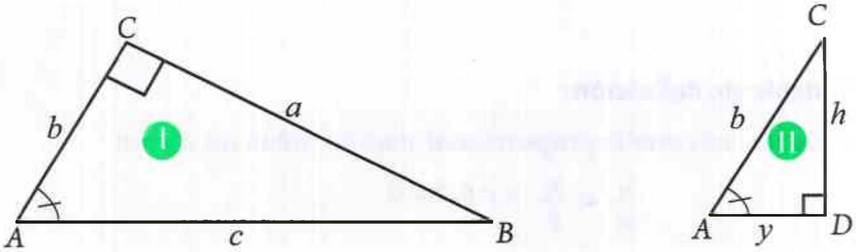






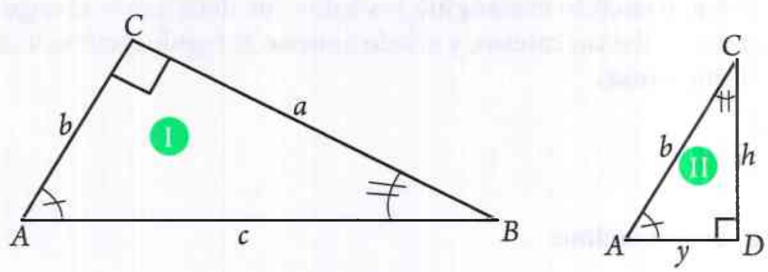
Consideremos estos triángulos en parejas:

ΔI y ΔII



$\angle ACB = \angle ADC$ porque son ángulos rectos
$\angle CAB = \angle CAD$ porque son ángulos comunes a ambos triángulos.
Por lo tanto, $\Delta I \sim \Delta II$ por el criterio AA.

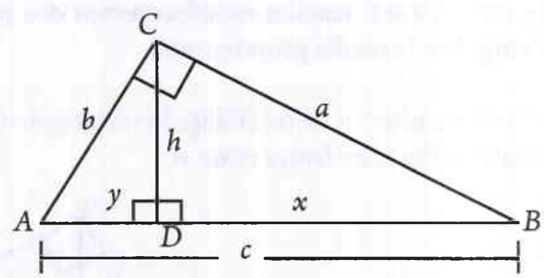
Automáticamente, por la propiedad del tercer ángulo, el par de ángulos restantes son iguales:



Entonces: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{CB}{DC}$

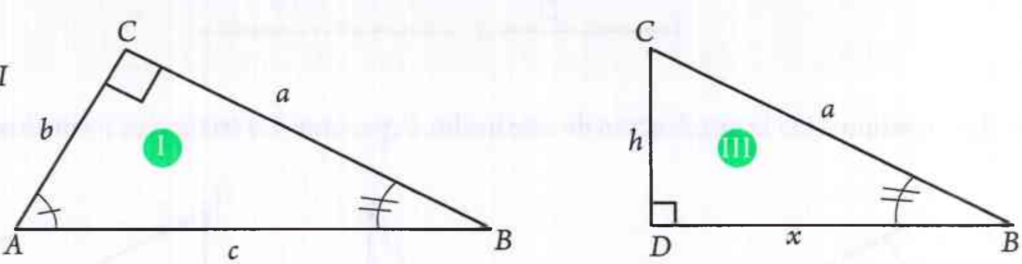
Sustituyendo: $\dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{a}{h}$

Si consideramos la proporción, $\dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{y}$
resulta lo siguiente: $b^2 = cy$



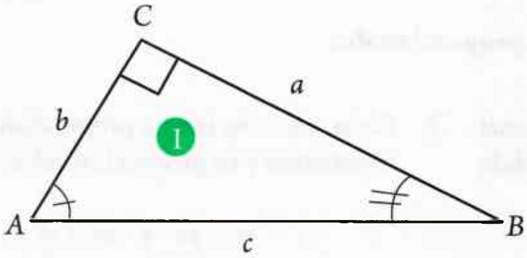
Por lo tanto, **el cateto *b* es media proporcional para *y* y *c*.**

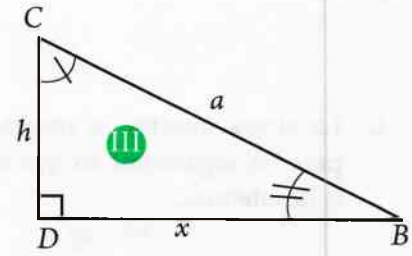
ΔI y ΔIII



$\angle ACB = \angle CDB$ porque son ángulos rectos.
$\angle ABC = \angle DBC$ porque son ángulos comunes a ambos triángulos.
Por lo tanto, $\Delta I \sim \Delta III$ por el criterio AA.

Automáticamente, el par de ángulos restantes son iguales:

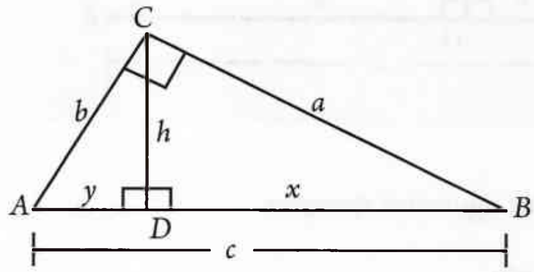




Entonces: $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{CB}{DB}$

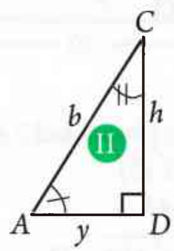
Sustituyendo: $\dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{x}$

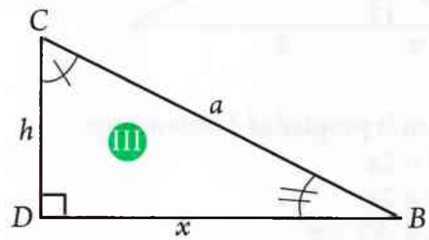
Si consideramos la proporción, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{x}$
resulta lo siguiente: $a^2 = cx$



Entonces, **el cateto *a* es media proporcional para *x* y *c*.**

ΔII y ΔIII: Para el análisis de estos triángulos, utilizaremos los pares de ángulos iguales resultantes de los análisis anteriores. En la siguiente figura se presentan con marcas iguales los ángulos iguales.

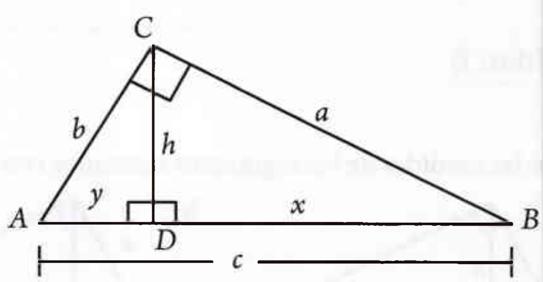




Por lo tanto, $\Delta II \sim \Delta III$

Entonces: $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$

Sustituyendo: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{y}{h} = \dfrac{h}{x}$



Si consideramos la proporción, $\dfrac{y}{h} = \dfrac{h}{x}$
resulta lo siguiente: $h^2 = xy$

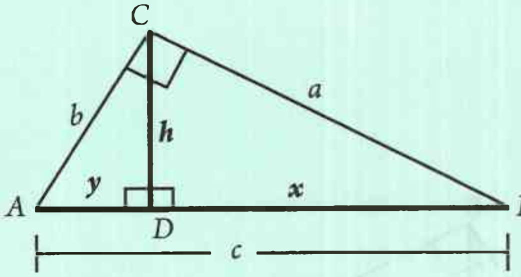
Entonces, **la altura *h* es media proporcional para *x* e *y*.**

De los análisis anteriores, se infieren las siguientes propiedades:

Medias proporcionales

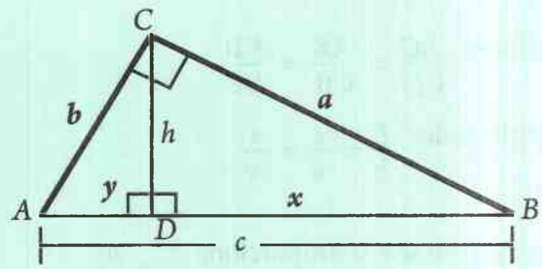
1. La altura interior es media proporcional para los segmentos en que queda dividida la hipotenusa.

$$h^2 = xy$$



2. Cada cateto es media proporcional para la hipotenusa y su proyección sobre ésta.

$$b^2 = yc \quad \text{y} \quad a^2 = xc$$

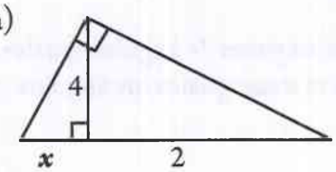


Estudia los siguientes ejemplos.

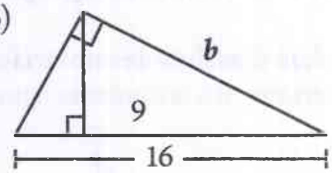
Ejemplo

Calcular el valor de cada incógnita

a)



b)



Solución

a) Con la propiedad 1 obtenemos

$4^2 = 2x$

$16 = 2x$

$x = \dfrac{16}{2} = 8$

b) Con la propiedad 2 obtenemos

$b^2 = 9(16)$

$b^2 = 144$

$b = \sqrt{144} = 12$

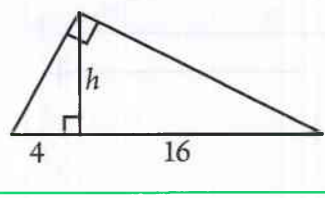
Ahora, para que practiques, realiza la siguiente actividad:

Actividad 6

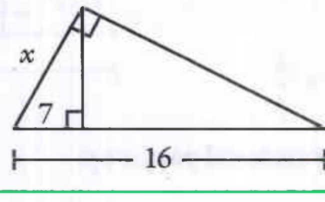
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Obtén las medidas de los segmentos marcados con literales:

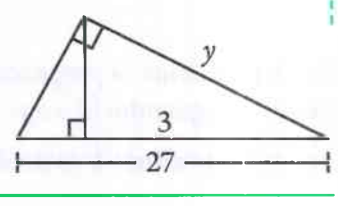
a)



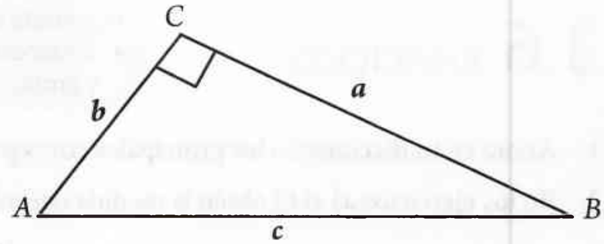
b)



c)



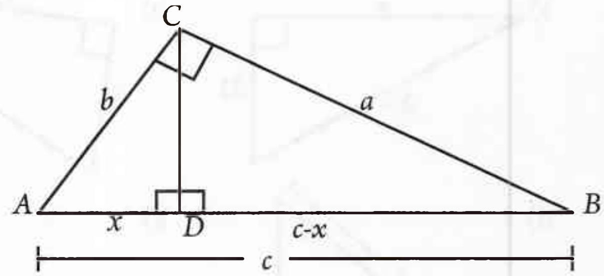
Lee con atención:



Ahora, usando los resultados relativos a medias proporcionales de un triángulo rectángulo, justificaremos una de las propiedades más importantes de los triángulos rectángulos: el **teorema de Pitágoras.**

Consideremos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa y catetos midan c, a y b respectivamente.

Si trazamos la altura correspondiente al vértice C, la hipotenusa queda dividida como se indica:



Aplicando la propiedad 2 de medias proporcionales obtenemos:

$$b^2 = xc \qquad (1)$$
$$a^2 = (c - x)c = c^2 - xc \qquad (2)$$

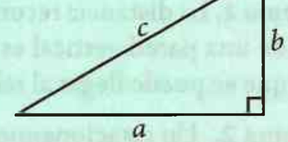
Sumando ambos lados de (1) y (2): $b^2 + a^2 = \cancel{xc} + c^2 - \cancel{xc}$
Por lo tanto: $a^2 + b^2 = c^2$

Hemos justificado el teorema de Pitágoras que se enuncia de la siguiente manera:

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

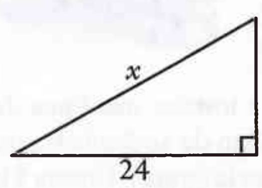
$$c^2 = a^2 + b^2$$

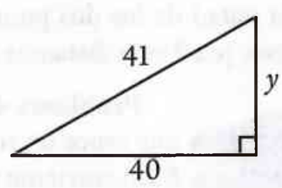


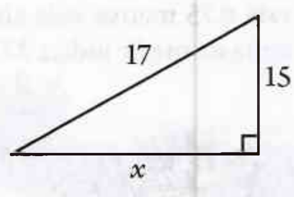
Estudia los siguientes ejemplos:

Ejemplo

Obtén en cada caso el lado desconocido.

a)


b)


c)


Solución

a) Por el Teorema de Pitágoras:

$x^2 = 24^2 + 7^2$
$x^2 = 576 + 49$
$x = \sqrt{625} = 25$

b) Por el Teorema de Pitágoras:

$y^2 = 41^2 - 40^2$
$y^2 = 1681 - 1600$
$y = \sqrt{81} = 9$

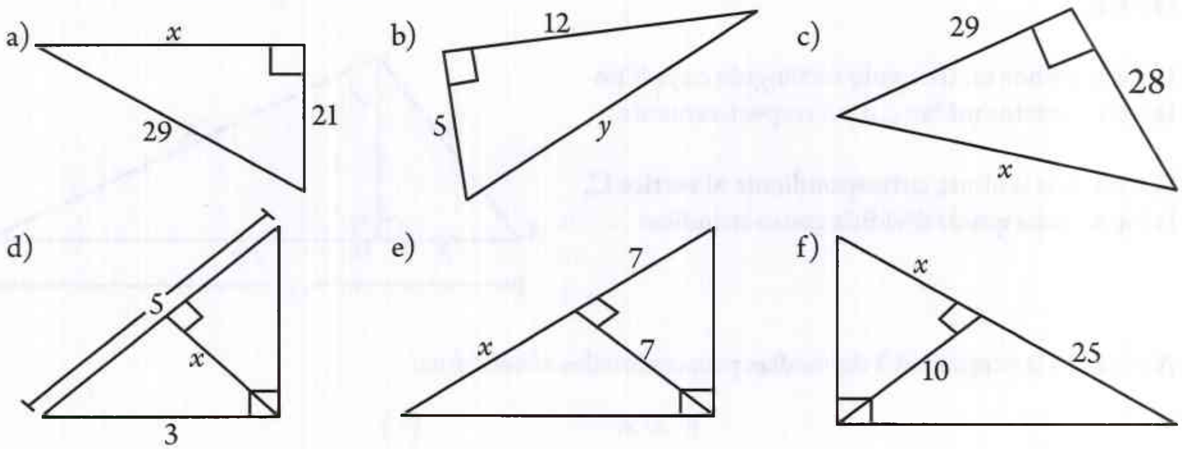
c) Por el Teorema de Pitágoras:

$x^2 = 17^2 - 15^2$
$x^2 = 289 - 225$
$x = \sqrt{64} = 8$

3.6 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

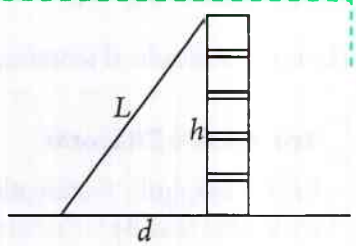
1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.
2. En los ejercicios a) al f) obtén la medida del lado desconocido en cada triángulo.



PROBLEMARIO INTERMEDIO

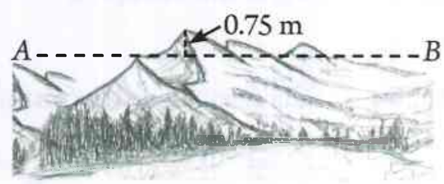
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de problemas resueltos sobre modelización matemática
- *Competencia o atributo a evaluar:* 7.3, 1 y 3

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

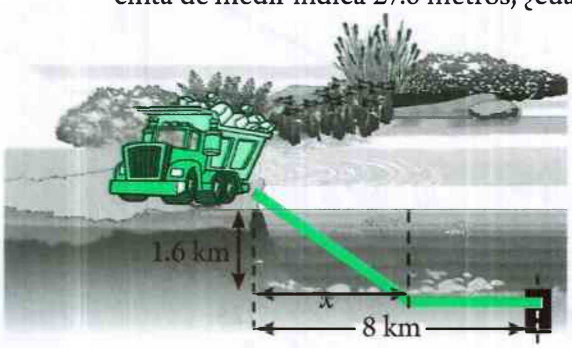


Problema 1. La distancia recomendada d a la que una escalera debe colocarse de una pared vertical es 25% de su longitud L. Aproxime la altura a la que se puede llegar al relacionar h como porcentaje de L.

Problema 2. Un estacionamiento rectangular mide 100 por 50 m. ¿Qué distancia se ahorrará conduciendo un automóvil a lo largo de una diagonal del lote para llegar al vértice opuesto, en vez de conducirlo por la parte externa?



Problema 3. Un grupo de ingenieros topógrafos quiere medir la distancia entre dos puntos A y B en un terreno accidentado. Desean conocer la distancia horizontal real AB. Si la tierra está 0.75 metros más alta en la mitad de los dos puntos y si la cinta de medir indica 27.0 metros, ¿cuál es la distancia real AB?



Problema 4. Se va a instalar una línea de energía eléctrica que cruce un río de 1.6 km de ancho hasta una ciudad que está 8 km corriente abajo (ver la figura). Cuesta $150,000.00 por km tender un cable bajo el agua y $120,000.00 por km tenderlo en tierra. Determina cómo debe instalarse el cable si se ha asignado $750,000.00 para este proyecto.

INSTRUCCIONES: Elabora un mapa conceptual de la unidad, para evaluar lo indicado.

MAPA CONCEPTUAL

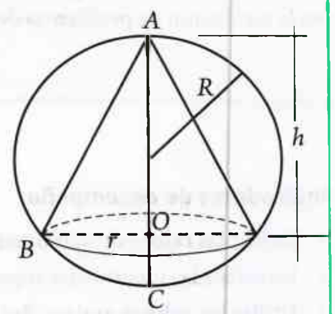
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Mapa conceptual de la unidad.
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.2

EXAMEN 3 (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar:* 2, 6 y 8

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

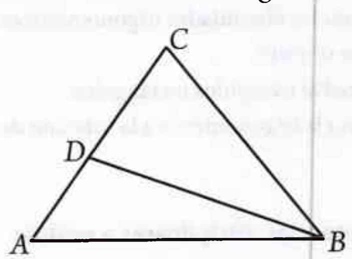
Problema 1. Un problema de cálculo diferencial, es encontrar la altura h del cono de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio R. Sea r el radio del cono. Lo más complicado del problema, es expresar r^2 en función de h y de R, pero, si aplicas lo que aprendiste sobre triángulos semejantes, esto se vuelve sencillo.



Demuestra que: $r^2 = \overline{AO} \times \overline{OC} = h(2R - h)$

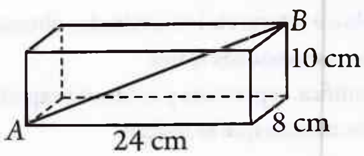
Problema 2. Una antena vertical de 3.5 m debe ser sostenida por un cable atado a un gancho sobre el piso a 1.5 m de la base de la antena. Si se supone que se requiere 30 cm adicional de cable en cada extremo para hacer los nudos, ¿cuánto debe medir el trozo de cable necesario para unir la parte superior de la antena con el gancho?

Problema 3. En el triángulo ABC de la siguiente figura, sabemos que el ángulo CBA es el doble del ángulo BCA, el lado CA es 2 unidades mayor que el lado AB, BC mide 5, y BD es bisectriz del ángulo ABC. ¿Cuánto miden AB y CA?



Problema 4. En un triángulo ABC el ángulo en A es igual a 36° y $AB = AC$. Muestra que *la bisectriz de BM del ángulo en B es igual a BC.*

Problema 5. Una caja tiene 24 cm de largo, 8 cm de ancho y 10 cm de alto. ¿Cuál es la longitud de la diagonal AB?



Problema 6. Lee con atención y resuelve lo indicado: Una terna pitagórica está formada por medidas de triángulos rectángulos que satisfacen el teorema de Pitágoras. Las siguientes expresiones producen ternas pitagóricas (a, b, c) con $a < b < c$:

> Para cualquier entero positivo n,
> $a = 2n + 1$
> $b = (½)(a^2 - 1)$
> $c = (½)(a^2 + 1)$

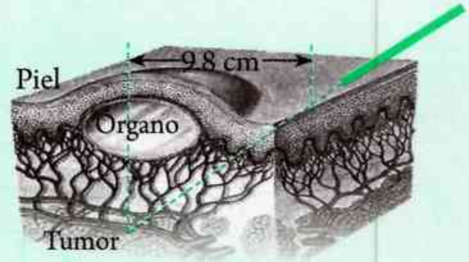
Ahora, determina cinco ternas pitagóricas y comprueba que lo son.

Actividad preliminar

¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

El siguiente problema muestra la utilización de algunos conceptos geométricos y trigonométricos, algunos ya estudiados y otros que estudiarás en esta unidad.

Problema. *Un paciente recibe un tratamiento con radioterapia para un tumor situado detrás de un órgano vital. Para evitar daño en el órgano, el radiólogo debe dirigir los rayos con un cierto ángulo hacia el tumor. Si el tumor está 6.3 cm debajo de la piel y los rayos penetran en el cuerpo 9.8 cm a la derecha del tumor, halla el ángulo con el que los rayos deben penetrar al cuerpo para atacar el tumor.*



Con tus conocimientos previos, resuelve la siguiente actividad.

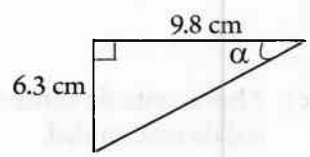
- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Autoevaluación

Actividad 1

a) Primero analiza la solución planteada a continuación.
Una vez que termines el estudio de la unidad vuelve a analizarla.

Solución

El problema puede modelarse mediante un triángulo rectángulo como el mostrado en la parte derecha. Los datos corresponden a los catetos del triángulo, y la incógnita es uno de los ángulos agudos del triángulo.



¿Cuánto vale α? ____________________

El problema se resuelve planteando una ***razón trigonométrica*** que relacione la incógnita y los datos. Esta razón, es la ***tangente*** del ángulo:

$$\boldsymbol{tan}\,\alpha = \frac{\textit{cateto opuesto a } \alpha}{\textit{cateto adyacente a } \alpha}$$

$$= \frac{6.3}{9.8}$$

$$= 0.6429$$

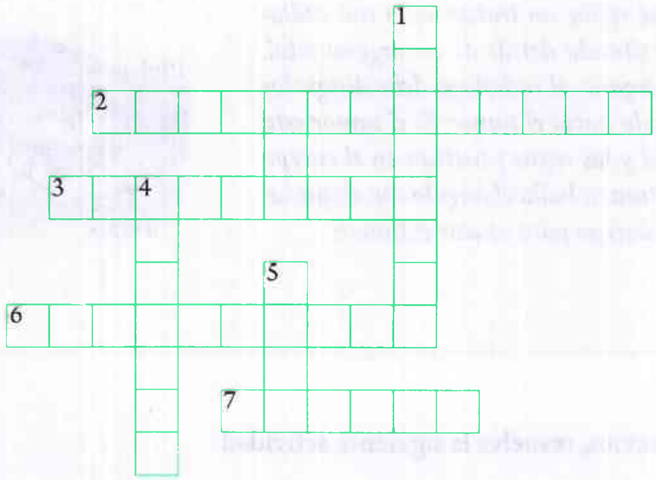
Por lo tanto: $\alpha = tan^{-1}(0.6429)$

$\alpha = 32° \, 42''$

Los rayos deben entrar al cuerpo con un ángulo de 32° 42''.

b) ¿Qué tanto recuerdas de lo que estudiarás en esta unidad?

Utiliza tus conocimientos previos para resolver el siguiente crucigrama. A continuación, consulta el material de esta unidad y revisa tus respuestas.



Horizontales

2. Nombre que reciben los triángulos que no son rectángulos.
3. Razón trigonométrica definida como la hipotenusa entre el cateto opuesto.
6. Razón trigonométrica definida como el cateto adyacente entre el cateto opuesto.
7. Razón trigonométrica definida como el cateto adyacente entre la hipotenusa.

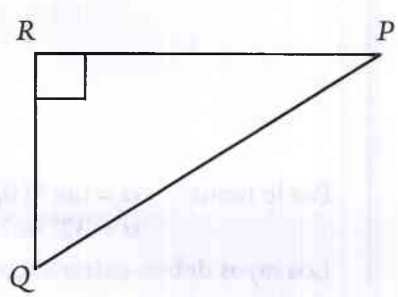
Verticales

1. Razón trigonométrica definida como el cateto opuesto entre el cateto adyacente.
4. Razón trigonométrica definida como la hipotenusa entre el cateto adyacente.
5. Razón trigonométrica definida como el cateto opuesto entre la hipotenusa.

c) Ahora, trata de contestar las siguientes cuestiones, y revísalas una vez que hallas estudiado el material de esta unidad.

En referencia a la figura de la derecha:

a) Nombra el cateto adyacente a $\angle P$.
b) Nombra el cateto opuesto a $\angle Q$
c) Nombra la hipotenusa
d) Nombra el cateto opuesto a $\angle P$.
e) Nombra el cateto adyacente a $\angle Q$.
f) ¿Qué es *sen P*?
g) ¿Qué es *cos P*?
h) ¿Qué es *tan Q*?
i) ¿Qué es *cos Q*?
j) ¿Qué es *sen Q*?

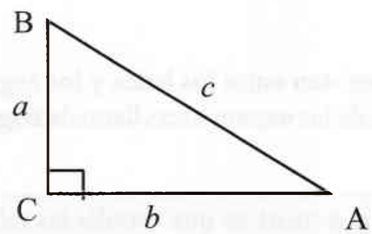


4.1 Razones trigonométricas

Lee atentamente la siguiente información acerca del triángulo rectángulo:

En todo triángulo rectángulo se tiene un ángulo recto y dos ángulos agudos. El lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros dos lados se llaman **catetos.** La hipotenusa es el mayor de los tres lados del triángulo.

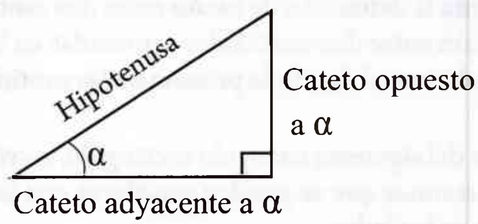
En el triángulo rectángulo:



$\angle C$ es ángulo recto.
c es la hipotenusa
a y b son catetos.

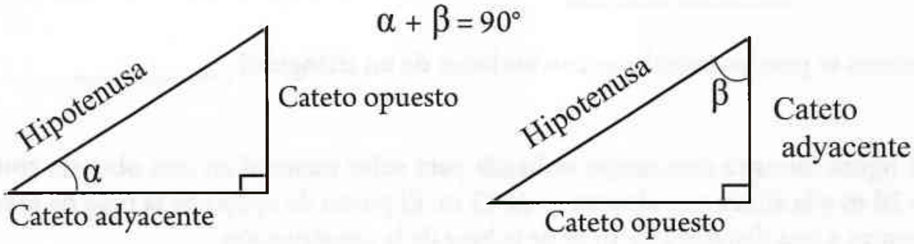
Cada ángulo agudo de un triángulo rectángulo tiene por lados la hipotenusa y uno de los catetos.

Para un cierto ángulo agudo α, los catetos reciben el nombre de *opuesto* o de *adyacente.*



En un triángulo rectángulo, los dos ángulos agudos son siempre complementarios, es decir la suma de sus medidas es 90°. Los catetos adyacente y opuesto se intercambian en estos ángulos.

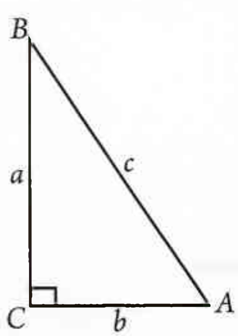
$$\alpha + \beta = 90°$$



Actividad 2

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Contesta correctamente:

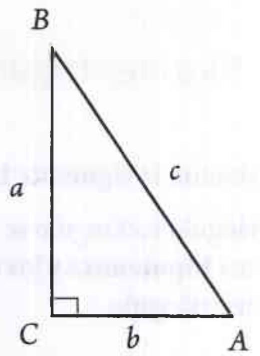


a) El cateto puesto a ∠A es_____
b) El cateto adyacente a ∠A es_____
c) El cateto opuesto a ∠B es_____
d) El cateto adyacente a ∠B es_____
e) La hipotenusa es_____

Recordemos que en los triángulos rectángulos se cumple el teorema de Pitágoras que relaciona los tres lados del triángulo.

Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Ahora, buscaremos las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de cualquier triángulo rectángulo. Para ello, estudiaremos la rama de las matemáticas llamada **trigonometría.** Analiza la siguiente definición de trigonometría.

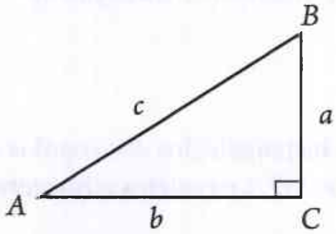
> La **trigonometría** es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de los triángulos, así como, su aplicación en la resolución de problemas.

Recuerda la definición de **razón** entre dos cantidades:
Una razón entre dos cantidades expresadas en las mismas unidades, es el cociente o cociente indicado que se obtiene al dividir la primera de las cantidades entre la segunda.

A partir del siguiente triángulo rectángulo, escribe todas las razones que se pueden establecer con las longitudes de los lados.

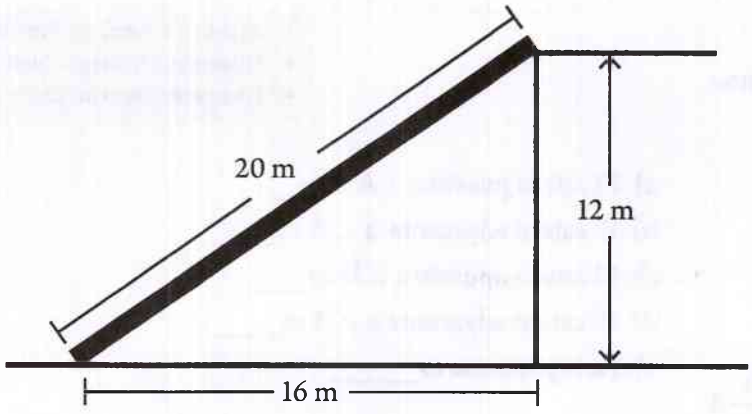
____

____

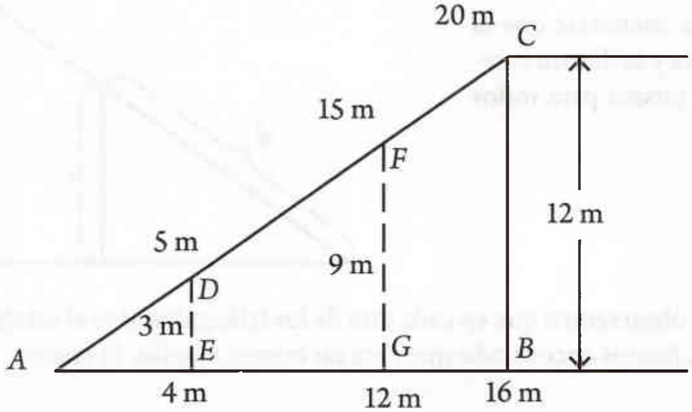


¿Cuántas razones se pueden establecer con los lados de un triángulo? ______________

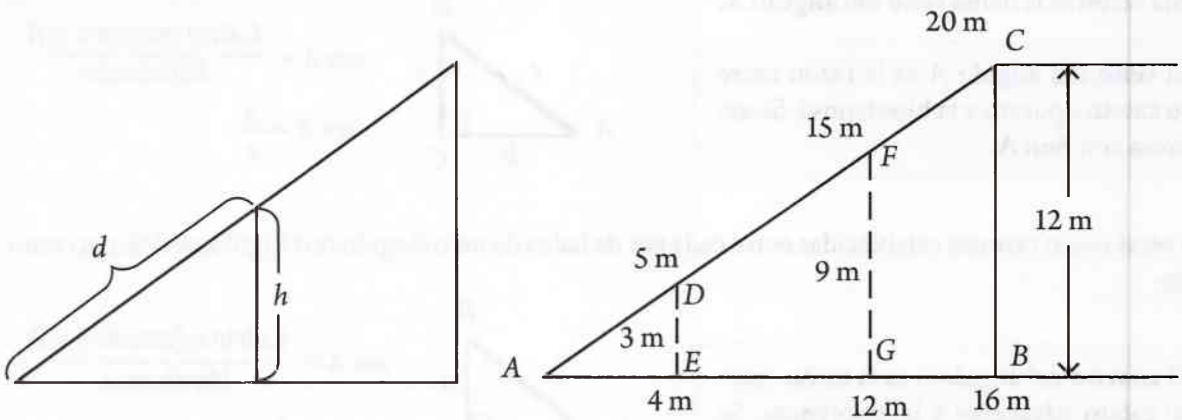
La siguiente figura muestra una rampa utilizada para subir material en una obra en construcción. La rampa mide 20 m y la altura que alcanza es de 12 m. El punto de apoyo de la base de la rampa sobre el piso se encuentra a una distancia de 16 m de la base de la construcción.



A continuación, se muestran distintas distancias recorridas sobre la rampa, así como, las alturas respectivas alcanzadas.



Consideremos la altura h que se alcanza en un punto de la rampa y la distancia d que se recorre sobre ella hasta dicho punto:



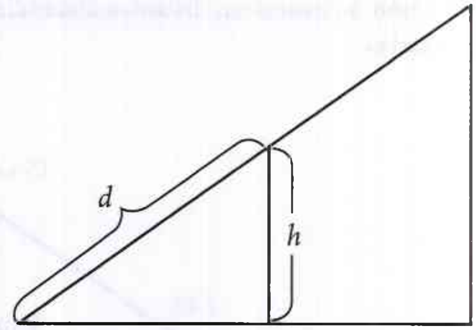
Contesta las siguientes preguntas:

1. En el punto D de las figura de la derecha ¿cuál es la razón $\frac{h}{d}$? __________
2. En el punto F de las figura de la derecha ¿cuál es la razón $\frac{h}{d}$? __________
3. En el punto C de las figura de la derecha ¿cuál es la razón $\frac{h}{d}$? __________
4. ¿Qué observas en las razones anteriores obtenidas? __________
5. Al recorrer la mitad de la rampa, ¿qué altura se alcanzará? __________
6. ¿Cuál es la razón $\frac{h}{d}$ entre la altura alcanzada al recorrer la mitad de la rampa y la distancia d que se recorre sobre ella? ________

Lee con atención:

En el inciso anterior, debiste encontrar que la razón entre la altura alcanzada y la distancia recorrida sobre la rampa es la misma para todos los triángulos formados.

$$\frac{h}{d} = constante.$$

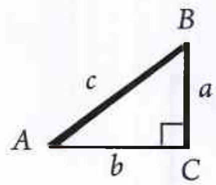


Si consideramos el ángulo **A**, observamos que en cada uno de los triángulos, *h* es el cateto opuesto y *d* es la hipotenusa. De esta forma, hemos encontrado que para un mismo ángulo, la razón:

$\dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$, resulta siempre la misma sin importar las medidas del triángulo.

A esta razón se le llama **seno del ángulo A.**

El **seno** del ángulo *A* es la razón entre su cateto opuesto y la hipotenusa. Se expresa con **Sen A.**

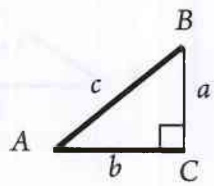


$$sen\ A = \frac{\text{Cateto opuesto a } \angle A}{\text{Hipotenusa}}$$

$$sen\ A = \frac{a}{c}$$

Las otras cinco razones establecidas entre cada par de lados de un triángulo rectángulo, se definen como sigue:

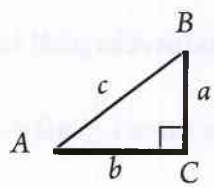
El **coseno** del ángulo *A* es la razón entre su cateto adyacente y la hipotenusa. Se expresa con **Cos A.**



$$cos\ A = \frac{\text{Cateto adyacente a } \angle A}{\text{Hipotenusa}}$$

$$cos\ A = \frac{b}{c}$$

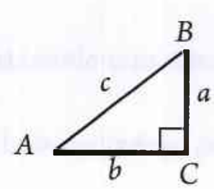
La tangente del ángulo *A* es la razón entre su cateto opuesto y su cateto adyacente. Se expresa con **Tan A o Tg A**



$$tan\ A = \frac{\text{Cateto opuesto a } \angle A}{\text{Cateto adyacente a } \angle A}$$

$$tan\ A = \frac{a}{b}$$

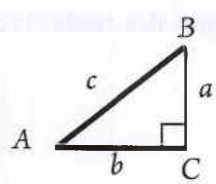
La cotangente del ángulo *A* es la razón entre su cateto adyacente y su cateto opuesto. Se expresa con **Cot A o Ctg A**



$$cot\ A = \frac{\text{Cateto adyacente a } \angle A}{\text{Cateto opuesto a } \angle A}$$

$$cot\ A = \frac{b}{a}$$

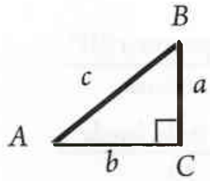
La secante del ángulo *A* es la razón entre la hipotenusa y su cateto adyacente. Se expresa con **SecA.**



$$sec\ A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a } \angle A}$$

$$sec\ A = \frac{c}{b}$$

La cosecante del ángulo A es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto. Se expresa con **Csc A.**



$$\csc A = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto\ a\ \angle A}$$

$$\csc A = \frac{c}{a}$$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

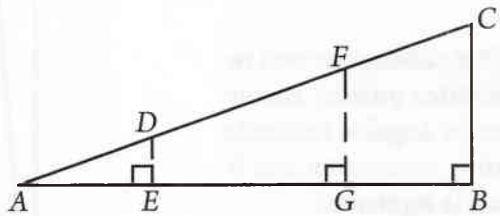
Actividad 3

a) Utiliza tus conocimientos sobre semejanza de triángulos para explicar que, para el ángulo A de la ilustración de la derecha, se cumple que:

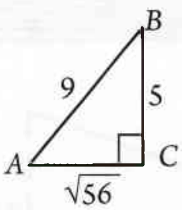
$$\frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF} = \frac{BC}{AC} = \text{Sen}\,A$$

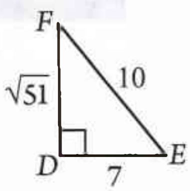
$$\frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF} = \frac{AB}{AC} = \text{Cos}\,A$$

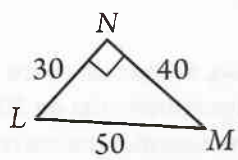
$$\frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG} = \frac{CB}{AB} = \text{Tan}\,A$$



b) Encuentra el valor de las razones trigonométricas para los ángulos agudos de cada triángulo:

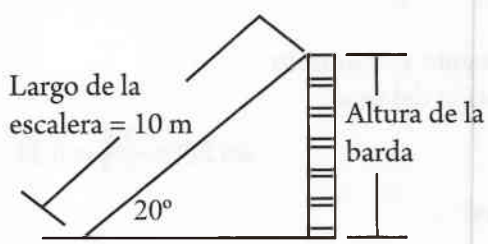






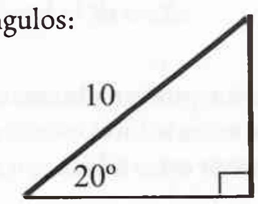
Estudia atentamente la siguiente situación problema:
Una escalera de 10 metros de largo, se recarga sobre una barda y su extremo inferior forma un ángulo de 20° con el piso, ¿cuál es la altura de la barda?

Primeramente debemos representar la situación planteada en un dibujo:



Datos: Identifiquemos las palabras asociadas con los triángulos rectángulos:

Ángulo = 20°
Hipotenusa = 10 m
Incógnita: Cateto opuesto a 20°



Sabemos que:

$$sen\ 20° = \frac{Cateto\ opuesto\ a\ 20°}{Hipotenusa}$$

$$sen\ 20° = \frac{Altura\ de\ la\ barda}{10}$$

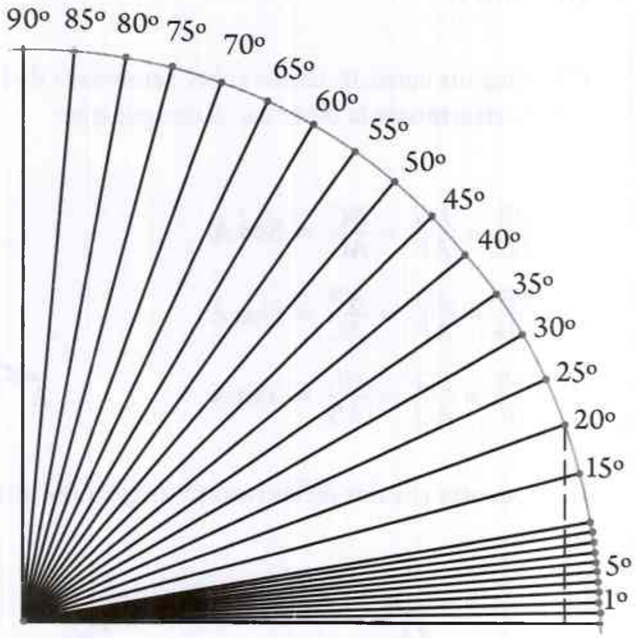
$$Sen\ 20° \times 10 = altura\ de\ la\ barda$$

$$altura\ de\ la\ barda = Sen\ 20° \times 10$$

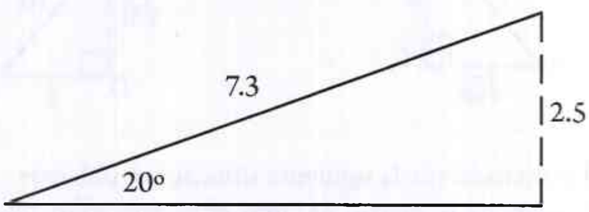
Lee con atención:

Observamos que si conociéramos el valor del ***seno de 20º***, el problema estaría resuelto.

El seno de 20º o cualesquier otra razón trigonométrica pueden encontrarse para varios ángulos haciendo mediciones muy precisas en una figura parecida a la siguiente:



Por ejemplo, si queremos los valores de las razones trigonométricas de 20º, tomamos el triángulo rectangulo que corresponde a este ángulo y después de medir cuidadosamente con una regla, calculamos cada uno de los cocientes.



Del triángulo y aplicando la definición del seno:

$$sen\ 20° = \frac{2.5}{7.3} = 0.34$$

Entonces:

$$altura\ de\ la\ barda = sen\,20° \times 10 = (0.34)(10) = 3.4\ \text{m}$$

De esta manera, pueden obtenerse tablas para los valores de las razones trigonométricas. Sin embargo, la precisión de estos valores estaría en función de muchos factores, por lo que existen otros procedimientos para obtener estas tablas con mayor precisión.

Ángulo	*sen*	*cos*	*tan*	Ángulo	*sen*	*cos*	*tan*
0°	0.0000	1.0000	0.0000	**45°**	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	**46°**	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	**47°**	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	**48°**	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	**49°**	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	**50°**	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	**51°**	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	**52°**	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	**53°**	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	**54°**	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	**55°**	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	**56°**	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	**57°**	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	**58°**	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	**59°**	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	**60°**	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	**61°**	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	**62°**	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	**63°**	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	**64°**	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	**65°**	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	**66°**	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	**67°**	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	**68°**	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	**69°**	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	**70°**	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	**71°**	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	**72°**	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	**73°**	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	**74°**	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	**75°**	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	**76°**	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	**77°**	0.9794	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	**78°**	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	**79°**	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	**80°**	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	**81°**	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	**82°**	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	**83°**	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	**84°**	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	**85°**	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	**86°**	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	**87°**	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	**88°**	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	**89°**	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	**90°**	1.0000	0.0000	∞

Variación de las razones trigonométricas: valores para 0º y 90º.

Observa la tabla de las razones trigonométricas de la página anterior. Contesta correctamente las siguientes preguntas:

1. Si el ángulo varía de 0º a 90º:

- ¿Cómo varía la razón seno? ______________________
- ¿Cómo varía la razón coseno? ______________________
- ¿Cómo varía la razón tangente? ______________________

2. ¿Cuánto valen las razones trigonométricas para 0º y 90º?

Variación del seno:

Tu respuesta debe ser parecida a la siguiente:

sen 0° < sen 1° < sen 5° < sen 10° < sen 20° < sen 30° < sen 60° < sen 85° < sen 90°

0.000 < 0.0175 < 0.0872 < 0.1736 < 0.3420 < 0.5000 < 0.866 < 0.9962 < 1.000

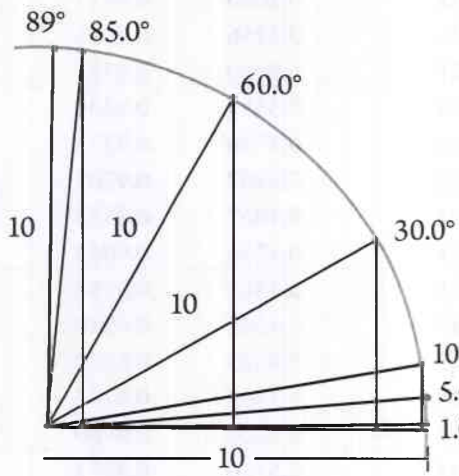
Si el ángulo varía de 0º a 90º, el seno aumenta de 0 hasta 1.

Lee con atención:

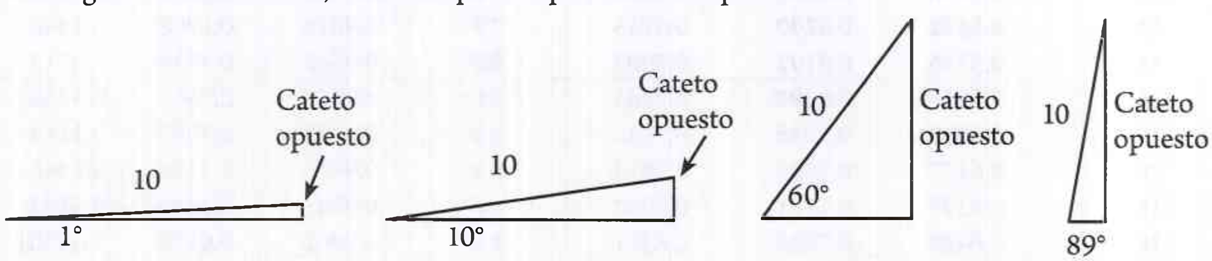
Para presentar un argumento lógico de esta variación, nos apoyaremos en la figura de la derecha. En ésta, se observa un cuarto de círculo parecido al que analizamos en la construcción de tablas trigonométricas.

Este tipo de figura, ofrece la ventaja de que la hipotenusa es la misma para todos los ángulos.

El valor de 10, es totalmente arbitrario.



En la figura, observamos que, en los triángulos rectángulos al variar el ángulo de 0° a 90°, el cateto opuesto al ángulo va aumentando, mientras que la hipotenusa siempre es 10:



Por lo tanto, al aumentar el ángulo, mientras la hipotenusa puede mantenerse constante, el cateto opuesto aumenta, por lo que el valor del seno dado por:

$$\frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Hipotenusa}} = \frac{\textit{valor que aumenta}}{\textit{valor constante}}$$

aumenta hasta un **valor máximo de 1.0**

Variación del coseno:

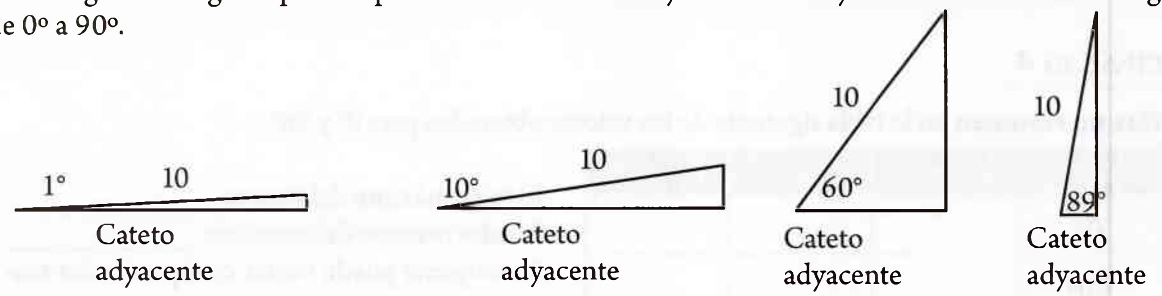
$$\cos 0° < \cos 1° < \cos 5° < \cos 10° < \cos 20° < \cos 30° < \cos 60° < \cos 85° < \cos 90°$$

$$\downarrow$$

$$1.000 < 0.9998 < 0.9962 < 0.9848 < 0.9397 < 0.8660 < 0.5000 < 0.0872 < 0.000$$

Si el ángulo varía de 0º a 90º, el coseno disminuye de 1 hasta 0.

En las siguientes figuras puede apreciarse como disminuye el cateto adyacente al aumentar el ángulo de 0º a 90º.



Por lo tanto, al aumentar el ángulo, mientras la hipotenusa puede mantenerse constante, el cateto adyacente disminuye, por lo que el valor del coseno dado por: $\dfrac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{Hipotenusa}} = \dfrac{\textit{valor que disminuye}}{\textit{valor constante}}$ disminuye hasta cero.

Variación de la tangente:

$$\tan 0° < \tan 1° < \tan 5° < \tan 10° < \tan 20° < \tan 30° < \tan 60° < \tan 85° < \tan 89° < \tan 90°$$

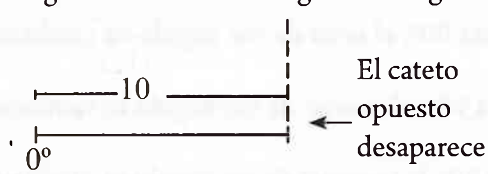
$$\downarrow$$

$$0.000 < 0.0175 < 0.0875 < 0.1763 < 0.3640 < 0.5774 < 1.7321 < 11.4301 < 57.29 < \infty$$

Si el ángulo varía de 0º a 90º, la tangente aumenta indefinidamente.

Ahora, analizemos los **valores para 0º y 90º**

Si «degradamos» un «triángulo rectángulo» con un ángulo de 0º y la hipotenusa igual a 10, se vería así:



Para 0º:

Valor del cateto opuesto______

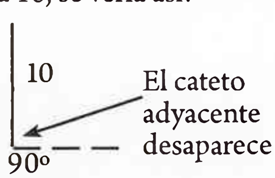
Valor del cateto adyacente______

Valor de la hipotenusa______

Entonces, las razones trigonométricas para 0º son:

$sen\ 0° = 0.000$ $\qquad$ $cos\ 0° = 1.000$ $\qquad$ $tan\ 0° = 0.000$

Por otro lado, si «degradamos» un «triángulo rectángulo» con un ángulo de 90º y la hipotenusa igual a 10, se vería así:



Para 90º:

el cateto opuesto vale 10.
el cateto adyacente vale 0.
la hipotenusa vale 10.

Entonces:

$sen\ 90° = 10/10 = 1.0$
$cos\ 90° = 0/10 = 0.0$
$tan\ 90° = 10/0 =$ *valor no definido.*

Analicemos el resultado de *tan* 90°. La división por cero no está permitida. Lo que podemos hacer, es **considerar en lugar de cero, un valor muy cercano a cero.**

Sea $0 \approx 0.000001$

Entonces: $\tan 90° \approx \tan 89.999° \approx \dfrac{10}{0.000001} = 10000000$

Por tanto, la tangente para ángulos muy cercanos a 90º, se eleva considerablemente. Sin embargo, **la tangente de exactamente 90º, no está definida.**

Actividad 4

Haz un resumen en la tabla siguiente de los valores obtenidos para 0° y 90°.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
0º			
90º			

El valor máximo del seno es ____________
El valor máximo del coseno es ____________
La tangente puede tomar cualquier valor mayor que ____________

4.1 EJERCICIOS

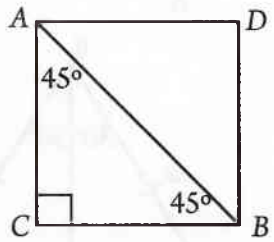
- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. En cada afirmación escribe cierto o falso según corresponda.
   a) Si el ángulo aumenta de 0° a 90°, el seno del ángulo aumenta. ____________
   b) Si el ángulo aumenta de 0° a 90°, el coseno del ángulo aumenta. ____________
   c) Si el ángulo aumenta de 0° a 90°, la tangente del ángulo aumenta. ____________
2. ¿Puede ser $\operatorname{sen} x = 2.0$? ____________ ¿Por qué?
3. ¿Puede ser $\cos x = 2.0$? ____________ ¿Por qué?
4. ¿Puede ser $\tan x = 2.0$? ____________ ¿Por qué?
5. Si la medida de un ángulo va cambiando desde 0º hasta 90º, el seno de ese ángulo va cambiando desde 0 hasta __________
6. Si la medida de un ángulo va cambiando desde 0º hasta 90º, el coseno de ese ángulo va cambiando desde ________ hasta __________
7. Si la medida de un ángulo va cambiando desde 0º hasta 90º, la tangente de ese ángulo va cambiando desde ________ hasta __________
8. ¿Verdadero o falso?
   a) Si $\angle A > \angle B$, entonces $\operatorname{sen} A > \operatorname{sen} B$.
   b) Si $\angle A > \angle B$, entonces $\cos A > \cos B$.
9. ¿Puede ser $\operatorname{sen} A > 2.0$? Explica.
10. ¿Puede ser $\cos A > 2.0$? Explica.
11. ¿Puede ser $\tan A > 2.0$? Explica.

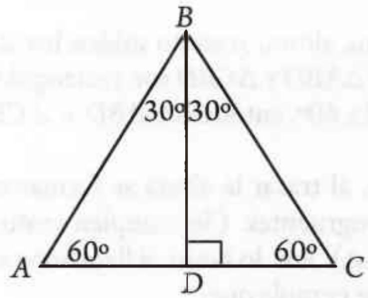
4.2 Razones trigonométricas de triángulos especiales

Lee atentamente:

En muchos problemas prácticos, es útil conocer los triángulos **45º-45º-90º** y **30º-60º-90º.**



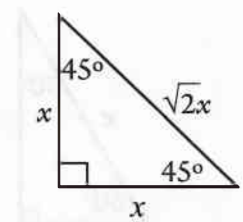
Un triángulo 45º-45º-90º está formado por dos lados de un cuadrado y una diagonal



Un triángulo 30º - 60º - 90º está formado por una altura de un triángulo equilátero.

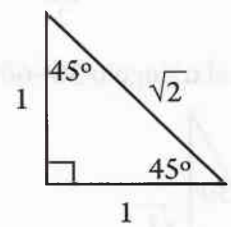
Los argumentos para estas aseveraciones se analizan a continuación.

Triángulo 45º-45º-90º



Por la propiedad para triángulos isósceles, podemos asegurar que en todo triángulo rectángulo isósceles los ángulos agudos son iguales. En el cuadrado mostrado arriba, al trazar la diagonal, se formaron dos triángulos rectángulos isósceles.

Los lados iguales pueden tener cualquier valor x. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:



$$hipotenusa = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x$$

Puesto que las razones trigonométricas no dependen del valor de los lados, haremos $x = 1$.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 5

Con base en las medidas del triángulo 45°-45°-90°, completa correctamente.

sen 45º = __________

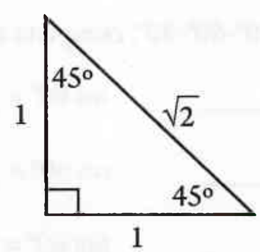
cos 45º = __________

tan 45º = __________

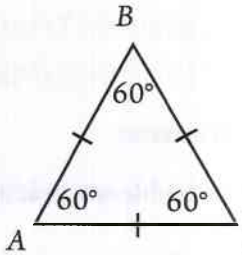
cot 45° = __________

sec 45° = __________

csc 45° = __________

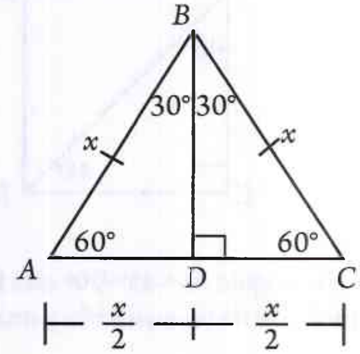


Estudia ahora, los argumentos relacionados con el triángulo **30º-60º-90º**



Como una consecuencia de la propiedad de los triángulos isósceles, y de la suma de ángulos interiores de los triángulos, sabemos que todos los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden 60º.

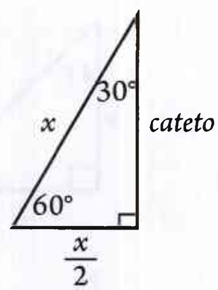
Si $\overline{BD}$ es una altura, ¿cuánto miden los $\angle ABD$ y $\angle CBD$? Puesto que ΔABD y ΔCBD son rectángulos con un ángulo agudo igual a 60º, entonces $\angle ABD = \angle CBD = 30°$.



Ahora bien, al trazar la altura se formaron dos triángulos que son congruentes. (Se cumplen tanto el criterio *LAL* como el *ALA*). Por lo tanto, si llamamos x a la longitud de cada lado, se cumple que:

$$AD = DC = \frac{x}{2}$$

Separando uno de los triángulos formados y aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

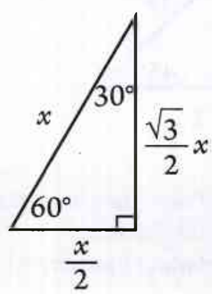


$$cateto = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

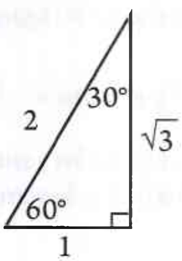
$$cateto = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,x$$

Por lo tanto, el triángulo 30º-60º-90º es:



En este triángulo, el valor para x que más conviene usar es el de 2. (Este valor evita el trabajar con un cateto fraccionario).



- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 6

a) Con base en las medidas del triángulo 30°-60°-90°, completa correctamente.

sen 30° = ________	*cot* 30° = ________	*sen* 60° = ________	*cot* 60° = ________
cos 30° = ________	*sec* 30° = ________	*cos* 60° = ________	*sec* 60° = ________
tan 30° = ________	*csc* 30° = ________	*tan* 60° = ________	*csc* 60° = ________

b) Completa la tabla

Ángulo	*sen*	*cos*	*tan*	*cot*	*sec*	*csc*
30°						
45°						
60°						

Ejemplo

Haciendo uso de la tabla se puede calcular el valor numérico exacto de expresiones como las siguientes:

1. $cot\,45° + sen\,30° = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

2. $tan\,45°\,sen\,30° - cot\,45°\,cos\,60° = 1\left(\frac{1}{2}\right) - 1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

3. $\frac{sec\,45°\,cos\,60°\,cot\,30°}{sen\,30°\,tan\,60°\,csc\,45°} = \frac{(\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\,(\sqrt{2})} = 1$

4.2 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Hallar el valor numérico exacto de:
   a) 2 sen 30°cos 30° cot 60°
   b) sen 60° cot 30°tan 45°
   c) sen 30° cos 45° + cos 60° tan 30°
   d) cot 60° tan 30° + sec^2 45°
   e) tan^2 60° + 2 tan^2 45°
   f) 2 cot 30° + sec 60°
   g) 3 tan 45° - 4sen 30°
   h) $\frac{\tan 45° + \cot 45°}{\csc 60°}$
   i) $\frac{\text{sen}\,60° - \cos 30°}{\sec 60°}$
   j) $\frac{\cos 45°\,\sec 60°}{\csc 45°}$

4.3 Determinación de razones trigonométricas y ángulos mediante calculadora

Estudia atentamente el procedimiento a seguir para determinar los valores de las razones trigonométricas mediante calculadora.

Ejemplo

1. **Calcular sen 35°.**

   Primeramente, para asegurarse de que la calculadora reconocerá al 35 como grado sexagesimal, debes cersiorarte que en la pantalla aparezca ***DEG;*** si no es así, presiona ***MODE*** y localiza el número correspondiente a *DEG*.

   A continuación oprime $\boxed{\text{sin}}$, y finalmente el valor 35°. La pantalla debe mostrar 0.5735764.

   OBSERVACIÓN 1. En algunas calculadoras, primeramente se teclea la medida del ángulo y a continuación la razón trigonométrica. En este caso, primero deben presionarse 3 y 5, y a continuación $\boxed{\text{sin}}$. **Investiga cómo funciona tu calculadora.**

   OBSERVACIÓN 2. Otra manera de verificar que tu calculadora está en *DEG,* es determinando a modo de prueba, el valor de ***tan* 45°** que ya sabemos es 1. Si tu calculadora no te dá 1, no está en modo *DEG.*

2. **Calcular** *cos* 27° 30′ 45′′.

Para calcular *cos* 27° 30′ 45′′, se convierten previamente los segundos a minutos y los minutos a grados. Algunas calculadoras cuentan con la tecla $\boxed{\circ\ {}'\ {}''}$

O bien: $\boxed{\text{DMS}}$ que convierte directamente los minutos y segundos al sistema decimal.

En tal caso, el cálculo se simplifica y la secuencia se reduce a:

$$\boxed{\cos}\ \boxed{27}\ \boxed{\circ\ {}'\ {}''}\ \boxed{30}\ \boxed{\circ\ {}'\ {}''}\ \boxed{45}\ \boxed{\circ\ {}'\ {}''}\ \boxed{=}$$

En algunas calculadoras la secuencia de pasos es:

$$\boxed{27}\ \boxed{\circ\ {}'\ {}''}\ \boxed{30}\ \boxed{\circ\ {}'\ {}''}\ \boxed{45}\ \boxed{\circ\ {}'\ {}''}\ \boxed{\cos}\ \boxed{=}$$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 7

Usando la calculadora determina el valor de las razones trigonométricas de los ángulos indicados. Aproxima hasta 4 cifras decimales. **¿Cómo determinarías Cot, sec y csc?**

Razón / Ángulo	*seno*	*coseno*	*tangente*	*cotangente*	*secante*	*cosecante*
27°						
16° 29′						
89°						
46° 30′						
36° 17′						
25° 35′ 10′′						

Estudia el siguiente ejemplo que muestra cómo determinar el valor de un ángulo conocida la razón trigonométrica.

Dado el valor de una razón, determinar el ángulo.

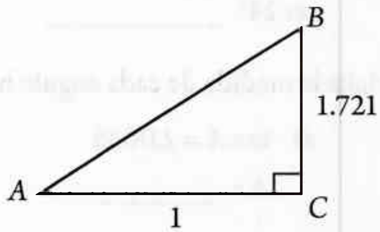
Ejemplo 1

Si ***tan A* = 1.721,** encontrar el ángulo *A* usando calculadora.

Solución

En este caso, conocemos el valor de la razón trigonométrica, pero no conocemos el ángulo. Es un problema inverso a los ya estudiados.

Si *tan A* = 1.721, entonces podemos dibujar el siguiente triángulo



Nos interesa el valor del ángulo A.

$tan\ A = 1.721$

$\downarrow$

Determinar el ángulo *A*, cuya tangente vale 1.721

Esto se ecribe: $\underbrace{A = tan^{-1}(1.721)}$.

Ésto, representa a un ángulo ***A***, cuya tangente es 1.721

Para este cálculo, debemos activar la tecla $\boxed{\text{Shift}}$, $\boxed{\text{INV}}$ o $\boxed{\text{2nda}}$

El procedimiento se muestra a continuación.

Pasos a seguir para calcular el ángulo A:

Primero. Asegurarse de que la pantalla muestre ***DEG.***

Segundo. Realizar lo siguiente: $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{1.721}$ $\boxed{=}$

Por lo tanto, el ***ángulo cuya tangente vale*** 1.721 es 59.8°.

Actividad 8

Usando calculadora, encuentra, los ángulos que correspondan a las siguientes razones trigonométricas. (Rotula un triángulo con la información):

1) cos A = 0.3420

$\downarrow$

$\underbrace{A = cos^{-1}(0.3420)}$ = __________

Ésto representa a un__________,

cuyo _________ es 0.3420

2) sen B = 0.5

$\downarrow$

$\underbrace{B = sen^{-1}(0.5)}$ = ______________

Ésto representa a un__________,

cuyo _________ es 0.5

4.3 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Encuentra el valor de cada razón hasta la diezmilésima más cercana.

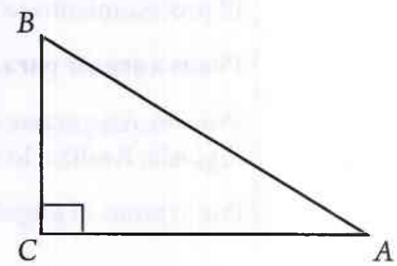
a) $sen\ 14°$ ________	$sen\ 42° =$ ________	$cos\ 34°$ ________
$cos\ 51°$ ________	$cos\ 37°\ 33'\ 45'' =$ ________	$cos\ 56.45°$ ________
$sen\ 7°$ ________	$tan\ 20° =$ ________	$tan\ 76.8°$ ________
$cos\ 24°$ ________	$sen\ 64°\ 45'\ 30'' =$ ________	$sen\ 24°\ 30'$ ________

2. Halla la medida de cada ángulo hasta el décimo de grado más cercano.

a) $tan\ A = 2.0035$ $A =$ ________	b) $cos\ B = 0.7980$ $B =$ ________	c) $sen\ A = 0.7245$ $A =$ ________
d) $cos\ B = 0.2493$ $B =$ ________	e) $tan\ C = 9.4618$ $C =$ ________	f) $sen\ A = 0.4567$ $A =$ ________
g) $cos\ A = 0.1466$ $A =$ ________	h) $tan\ A = 159.4618$ $A =$ ________	i) $sen\ A = 0.9855$ $A =$ ________

4.4 Relaciones entre las razones trigonométricas: ángulos complementarios y razones recíprocas

Lee atentamente y completa lo que se pide:

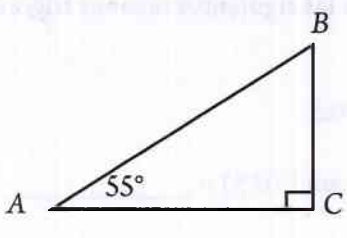


En un triángulo rectángulo, uno de los tres ángulos es ángulo recto, ¿cuántos grados suman los ángulos A y B juntos? ________

Si dos ángulos suman 90° se les llama ________.

En cualquier triángulo rectángulo los dos ángulos agudos son complementarios.

Si se conoce la medida de un ángulo agudo, se puede encontrar la medida de su complemento.



$\angle A + \angle B = 90°$

$55° + \angle B = 90°$

$\angle B = 90° - 55°$

Para simplificar con frecuencia escribiremos:

$A + B = 90°$

$55° + B = 90°$

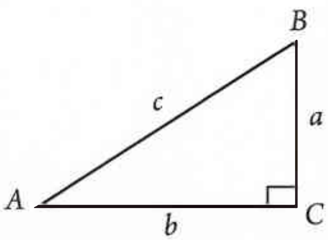
$B = 90° - 55°$

En general, si $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios, se cumple que:

$\angle A = 90° - \angle B$, o bien, $\angle B = 90° - \angle A$

(También escribiremos: $A = 90° - B$ o $B = 90° - A$).

Estableceremos ahora, una relación entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios. Para ello, determinemos las razones trigonométricas tanto del $\angle A$ como del $\angle B$ con base en el siguiente triángulo:



$$sen\,A = \frac{a}{c} \qquad sen\,B = \frac{b}{c}$$

$$cos\,A = \frac{b}{c} \qquad cos\,B = \frac{a}{c}$$

$$tan\,A = \frac{a}{b} \qquad tan\,B = \frac{b}{a}$$

$$cot\,A = \frac{b}{a} \qquad cot\,B = \frac{a}{b}$$

$$sec\,A = \frac{c}{b} \qquad sec\,B = \frac{c}{a}$$

$$csc\,A = \frac{c}{a} \qquad csc\,B = \frac{c}{b}$$

$sen\,A = cos\,B$

$cos\,A = sen\,B$

$tan\,A = cot\,B$

$cot\,A = tan\,B$

$sec\,A = csc\,B$

$csc\,A = sec\,B$

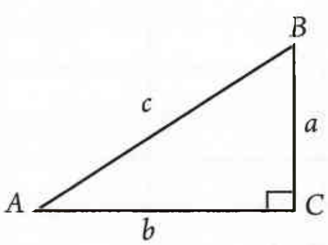
El valor de la razón trigonométrica de un ángulo, es igual a la **co-razón** del ángulo complementario.

Lee con atención:

Así como el seno, tangente y secante se relacionan con sus correspondientes *co-razones* del ángulo complementario, el seno, coseno y tangente, están relacionadas respectivamente con la cosecante, secante y cotangente del mismo ángulo. Para entender ésto, recuerda que un número a es **recíproco o inverso** de otro número b si $\boldsymbol{ab = 1}$.

Si $ab = 1$, entonces $\boldsymbol{a = \frac{1}{b}}$ o $\boldsymbol{b = \frac{1}{a}}$

Las primeras tres razones trigonométricas definidas, tienen todas ellas su recíproco o inverso. Ésto, podrá apreciarse en el siguiente desarrollo:



$$sen\,A = \frac{a}{c} \longrightarrow sen\,A \cdot csc\,A = \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{ac}{ca} = 1$$

$$cos\,A = \frac{b}{c} \longrightarrow cos\,A \cdot csc\,A = \left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{bc}{cb} = 1$$

$$tan\,A = \frac{a}{b} \longrightarrow tan\,A \cdot cot\,A = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{ab}{ba} = 1$$

$$cot\,A = \frac{b}{a}$$

$$sec\,A = \frac{c}{b}$$

$$csc\,A = \frac{c}{a}$$

Tenemos pues, las siguientes identidades trigonométricas recíprocas o inversas:

$$sen\,A \cdot csc\,A = 1$$

$$cos A \cdot sec\,A = 1$$

$$tan\,A . cot\,A = 1$$

De estas expresiones podemos despejar cualesquiera de las razones involucradas. por ejemplo:

$$csc\,A = \frac{1}{sen\,A}$$

$$sec\,A = \frac{1}{cos\,A}$$

$$cot\,A = \frac{1}{tan\,A}$$

Estudia las siguientes aplicaciones de las relaciones recíprocas:

Ejemplo 1: Determinar el valor de: $cot\ 30°$.

Solución: Puesto que $(tan\ 30°)(cot\ 30°) = 1$, entonces, $cot\ 30° = \dfrac{1}{tan\ 30°} = \dfrac{1}{0.5774} = 1.732$

Ejemplo 2: Si $sen\,A = \dfrac{3}{7}$, ¿cuál es el valor de csc A?

Solución: Puesto que $(sen\,A)(csc\,A) = 1$, entonces, $csc\,A = \dfrac{1}{sen\,A} = \dfrac{1}{\frac{3}{7}} = \dfrac{7}{3}$

Ejemplo 3: Si $cot\,B = 5$, ¿cuál es el valor de $tan\,B$?

Solución: Puesto que $(tan\,B)(cot\,B) = 1$, entonces $tan\,B = \dfrac{1}{cot\,B} = \dfrac{1}{5}$

4.4 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Completa la tabla que empezaste en la sección 5.3.

Razón / Ángulo	*seno*	*coseno*	*tangente*	*cotangente*	*secante*	*cosecante*
27°						
16° 29 ′						
89°						
46° 30 ′						
36° 17 ′						
25° 35 ′ 10 ′′						

2. Escribe verdadero o falso según corresponda. En caso de ser falso, escribir la expresión correcta. Usa el triángulo de la derecha o las relaciones ya establecidas.

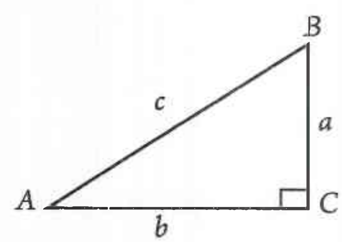
a) $tan\,A = \dfrac{1}{cot\,A}$

b) $sen\,A = \dfrac{1}{sec\,A}$

c) $cos\,A = \dfrac{1}{sen\,A}$

d) $cos\,A = cos\,(90° - A)$

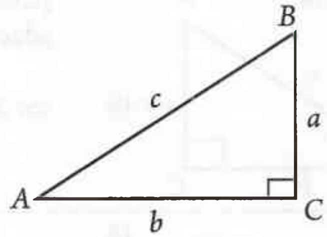
e) $cos\,B = sen\,(90° - A)$

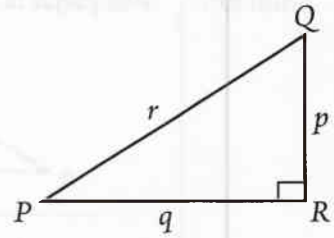


4.5 Resolución de triángulos rectángulos

Lee con atención:

En la solución de triángulos, es conveniente nombrar los ángulos con letras mayúsculas y los lados opuestos a dichos ángulos con la respectiva letra minúscula.

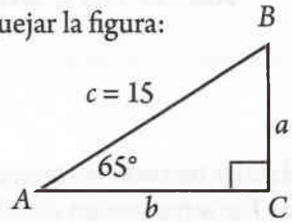




Estudia atentamente los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1 Si $\angle A = 65°$ y $c = 15$, encontrar a.

Solución | Bosquejar la figura:



Plantear las primeras tres razones trigonométricas *y elegir aquella que contenga a los datos y a la incógnita:*

$$sen\ 65° = \frac{a}{15} \qquad cos\ 65° = \frac{b}{15} \qquad tan\ 65° = \frac{a}{b}$$

La igualdad que contiene la incógnita y los datos necesarios, es la primera $\longrightarrow$ $sen\ 65° = \dfrac{a}{15}$

Usar la calculadora o una tabla para hallar el *sen* 65°: $0.9063 = \dfrac{a}{15}$

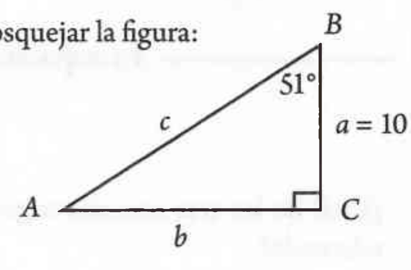
Recuerda que si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $ad = bc$ $\longrightarrow$ $\dfrac{0.9063}{1} = \dfrac{a}{15}$ $\longrightarrow$ $(0.9063)(15) = a(1)$

$$13.5945 = a$$

Redondeando al décimo más próximo, $a = 13.6$

Ejemplo 2. Si $\angle B = 51°$ y $a = 10$, encuentra c.

Solución | Bosquejar la figura:



¿Cuál de las tres razones trigonométricas es la adecuada? Enciérrala en un círculo.

$$sen\ 51° = \frac{b}{c} \qquad cos\ 51° = \frac{10}{c} \qquad tan\ 51° = \frac{b}{10}$$

Elegimos la segunda: $cos\ 51° = \dfrac{10}{c}$

$$0.6293 = \frac{10}{c}$$

$$0.6293\, c = 10$$

Dividiendo cada lado por 0.6293:

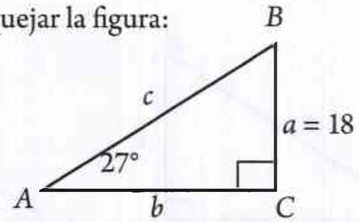
$$c = \frac{10}{0.6293} = 15.9$$

Así, c es 15.9 al décimo más cercano.

Ejemplo 3. Si $\angle A = 27°$ y $a = 18$, encuentra b.

Solución

Bosquejar la figura:



¿Cuál de las tres razones trigonométricas es la adecuada? Enciérrala en un círculo.

$sen\ 27° = \dfrac{18}{c}$ $\quad cos\ 27° = \dfrac{b}{c}$ $\quad tan\ 27° = \dfrac{18}{b}$

Elegimos la tercera: $tan\ 27° = \dfrac{18}{b}$

$$0.5095 = \frac{18}{b}$$

$$0.5095\,b = 18$$

Dividiendo cada lado por 0.5095:

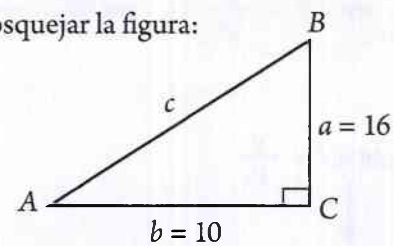
$$b = \frac{10}{0.5095} = 35.3$$

Así, b es 35.3 al décimo más cercano.

Ejemplo 4. Si $a = 16$ y $b = 10$, encuentra $\angle A$.

Solución

Bosquejar la figura:



¿Cuál de las tres razones trigonométricas es la adecuada? Enciérrala en un círculo.

$sen\ A = \dfrac{16}{c}$ $\quad cos\ A = \dfrac{10}{c}$ $\quad tan\ A = \dfrac{16}{10}$

Elegimos la tercera: $tan\ A = \dfrac{16}{10} = 1.6$

Buscamos un ángulo cuya tangente es 1.6

Recuerda que matemáticamente esto se escribe: $A = tan^{-1}(1.6)$

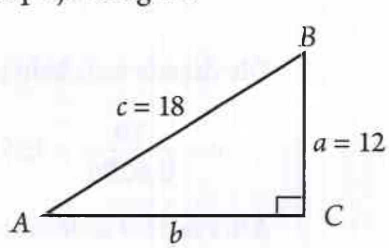
La tecla $\boxed{tan^{-1}}$ se activa con la tecla $\boxed{\text{Shift}}$

$\boxed{\text{Shift}}\ \boxed{\text{tan}}\ \boxed{1.6}\ \boxed{=}$ ⟶ La respuesta es $A = 58°$.

Ejemplo 5. Si $a = 12$ y $c = 18$, encuentra $\angle B$.

Solución

Bosquejar la figura:



¿Cuál de las tres razones trigonométricas es la adecuada?

Enciérrala en un círculo.

$sen\ B = \dfrac{b}{18}$ $\quad cos\ B = \dfrac{12}{18}$ $\quad tan\ B = \dfrac{b}{12}$

Elegimos la segunda: $\cos B = \dfrac{12}{18} = 0.6667$

Buscamos un ángulo
cuya coseno es 0.6667

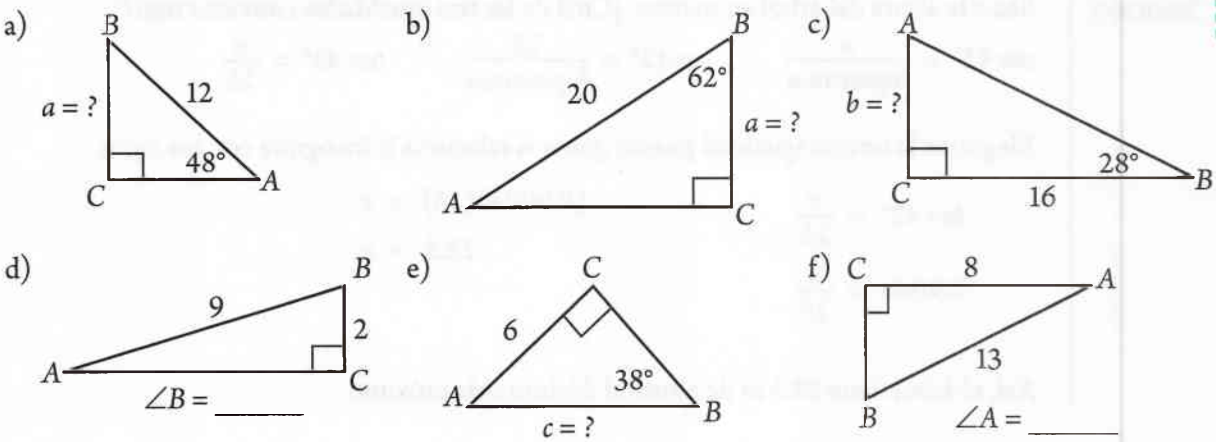
Recuerda que matemáticamente esto se escribe: $B = \cos^{-1}(0.6667)$

$\boxed{\text{Shift}}\ \boxed{\cos}\ \boxed{0.6667}\ \boxed{=}$ → La respuesta es $B = 48°$, al grado más cercano.

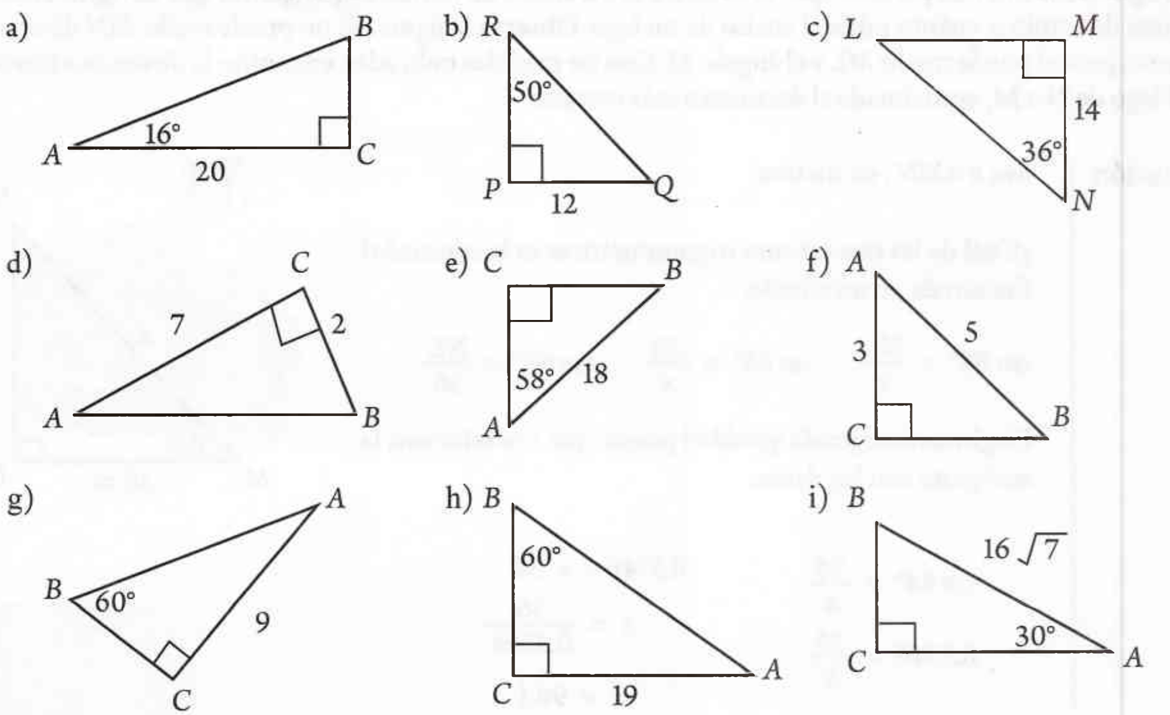
4.5 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Encontrar la medida indicada.

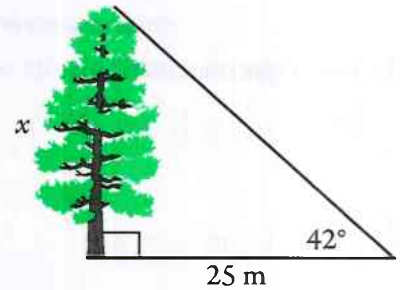


2. Resolver un triángulo, consiste en determinar todas las medidas faltantes (lados o ángulos). Resolver los siguientes triángulos.



4.6 Aplicaciones de la trigonometría

Estudia con atención los siguientes ejemplos



Ejemplo 1

Unos biólogos están interesados en medir la altura del árbol, para ello miden el ángulo y la distancia mostradas. ¿Cuál es la altura del árbol?

Solución

Sea x la altura del árbol en metros. ¿Cuál de las tres igualdades conviene usar?

$$sen\ 42° = \frac{x}{hipotenusa} \qquad cos\ 42° = \frac{25}{hipotenusa} \qquad tan\ 42° = \frac{x}{25}$$

Elegimos la tercera igualdad puesto que nos relaciona la incógnita con los datos.

$$tan\ 42° = \frac{x}{25}$$

$$0.9004 = \frac{x}{25}$$

$$(0.9004)(25) = x$$

$$22.5 = x$$

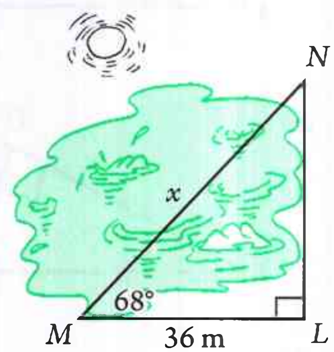
Así, el árbol tiene 22.5 m de altura al décimo más próximo.

Ejemplo 2

Un agrimensor es una persona que se dedica a la medición de tierras. Supongamos que un agrimensor quiere determinar cuánto mide el ancho de un lago. Observa la figura. Él no puede medir MN directamente, pero sí puede medir ML y el ángulo M. Con las medidas indicadas, encontrar la distancia a través del lago de N a M, aproximada al decímetro más cercano.

Solución

Sea $x = MN$, en metros



¿Cuál de las tres razones trigonométricas es la adecuada? Enciérrala en un círculo.

$$sen\ 68° = \frac{NL}{x} \qquad cos\ 68° = \frac{36}{x} \qquad tan\ 68° = \frac{NL}{36}$$

Elegimos la segunda igualdad puesto que nos relaciona la incógnita con los datos.

$$cos\ 68° = \frac{36}{x}$$

$$0.3746 = \frac{36}{x}$$

$$0.3746\,x = 36$$

$$x = \frac{36}{0.3746}$$

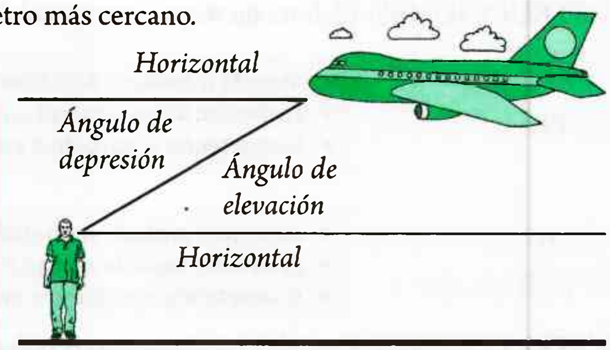
$$x = 96.1$$

Así, la distancia a través del lago es 96.1 m al decímetro más cercano.

Estudia con atención las siguientes definiciones.

Un **ángulo de elevación** es el ángulo formado por una recta horizontal (real o imaginaria) y la línea de visión mirando hacia arriba.

Un **ángulo de depresión** es el ángulo formado por una recta horizontal (real o imaginaria) y la línea de visión mirando hacia abajo.



Ejemplo 3

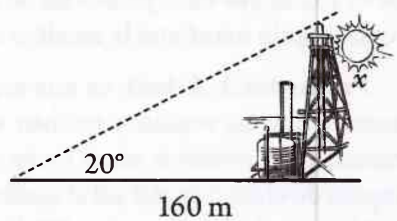
Una torre de líneas de alta tensión proyecta 160 m de sombra cuando el ángulo de elevación del sol mide 20°. ¿Qué altura tiene la torre?

Solución

Sea x la altura de la torre en metros. ¿Cuál de las tres igualdades conviene usar?

$$sen\ 20° = \frac{x}{hipotenusa} \qquad cos\ 20° = \frac{160}{hipotenusa} \qquad tan\ 20° = \frac{x}{160}$$

La tangente nos relaciona la incógnita con los datos: $tan\ 20° = \dfrac{x}{160}$



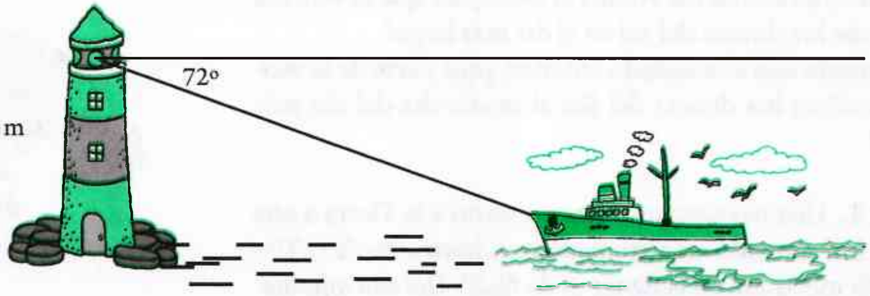
$(0.3640)(160) = x$ la torre tiene una altura

$58.2 = x$ aproximada de 58.2

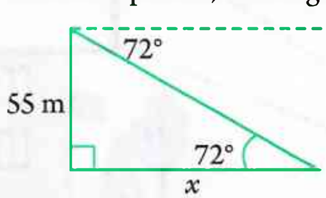
Ejemplo 4

Un faro tiene 55 m de altura. El ángulo de depresión desde la cima del faro hasta el barco en el mar es de 72°. ¿Qué tan lejos de la base del faro está el barco?

Solución



Considerando que el ángulo de elevación es igual al ángulo de depresión, y llamando x a la distancia pedida, el triángulo que nos interesa resolver es el mostrado abajo:



$$tan\ 72° = \frac{55}{x}$$

$$3.0777 = \frac{55}{x}$$

$$3.0777x = 55$$

$$x = \frac{55}{3.0777}$$

$$x = 17.8$$

La tangente relaciona la incógnita con los datos.
El barco se encuentra 17.8 m del faro aproximadamente.

INSTRUCCIONES: Elabora un mapa conceptual de la unidad para evaluar lo indicado.

MAPA CONCEPTUAL

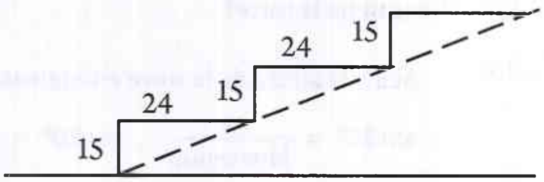
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Mapa conceptual de la unidad.
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.2

PROBLEMARIO INTERMEDIO

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de problemas resueltos sobre modelización matemática
- *Competencia o atributo a evaluar:* 7.3, 1 y 3

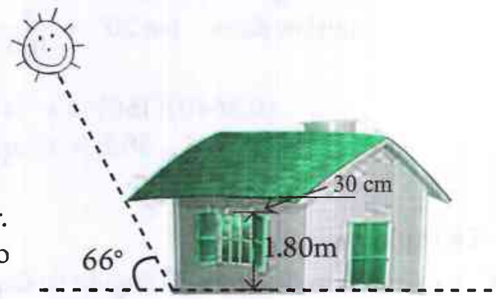
INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. Dos estaciones meteorológicas están situadas a 10 km una de otra. Se sitúa un globo meteorológico entre ambas estaciones. Desde la estación 1, el ángulo de elevación del globo es 35° desde la estación 2, 54°. Determina la altura del globo.



Problema 2. Cada peldaño de una escalera se eleva 15 cm por cada pisada de un ancho de 24 cm. ¿Qué ángulo mantiene la escalera con relación al piso?

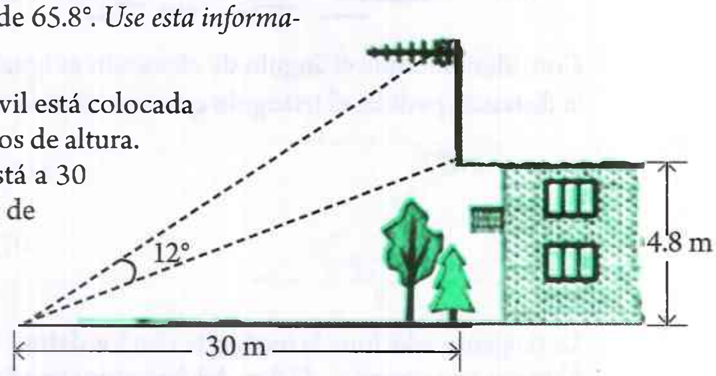
Problema 3. Ariana, es una arquitecta, diseña casas de manera que las ventanas reciban un mínimo de sol en el verano y un máximo en el invierno. En cierta ciudad, el ángulo de elevación del sol al medio día, en el día más largo, es 66° y en el día más corto, 19°. Supongamos que se diseña una casa con una ventana de 1.80 metros de alto hacia el sur. La parte superior de la ventana se instalará 30 cm por debajo del alero.



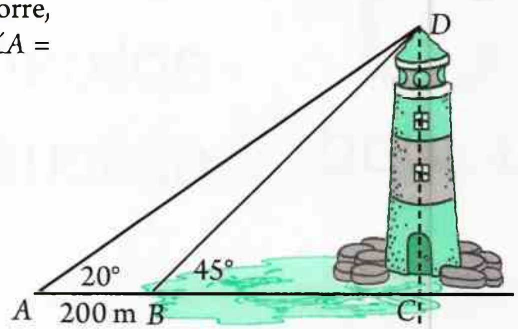
a) ¿Qué anchura debe dar Ariana al alero para que la ventana no reciba luz directa del sol en el día más largo?
b) De acuerdo con el resultado anterior, ¿qué parte de la ventana recibirá luz directa del Sol al medio día del día más corto?

Problema 4. Una nave espacial gira en torno a la Tierra a una altitud de 608 km. Cuando un astronauta ve el horizonte de la Tierra, el ángulo Θ mostrado en la figura es de 65.8°. *Use esta información para estimar el radio de la Tierra.*

Problema 5. Una antena de banda civil está colocada encima de un almacén que mide 4.8 metros de altura. Desde un punto al nivel del suelo que está a 30 metros de un punto directamente debajo de la antena, la antena subtiende un ángulo de 12°, como se muestra en la figura. Calcula la longitud de la antena



Problema 6. Se desea encontrar la altura (DC) de una torre, pero no es posible medir directamente las distancias. Si $\angle A = 20°$, $\angle DBC = 45°$ y $AB = 200$ m, calcúlese DC.



EXAMEN 4 (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de la unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 2 y 6

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. Desde un observatorio situado a 35 m sobre el nivel del mar se localiza una embarcación con un ángulo de depresión de 6° 15´. Determina cuál es la distancia de la embarcación a la base del observatorio.

Problema 2. Determina el ángulo de elevación del sol, si un poste de 7 m de altura proyecta una sombra de 2.5 m.

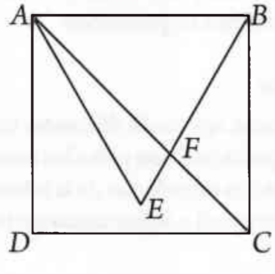
Problema 3. A 57 m del pie de una antena de radio, el ángulo de elevación en su extremo superior es de 29° 37´. ¿Cuál es la altura de la antena si el aparato co que se mide el ángulo es de 1.45 m?

Problema 4. Desde un observatorio situado a 35 m sobre el nivel del mar se localiza una embarcación con un ángulo de depresión de 6° 15´. Determina cuál es la distancia de la embarcación a la base del observatorio.

Problema 5. Un árbol proyecta una sombra de 6 m cuando el ángulo de elevación del sol mide 58°. ¿Qué tan alto es el árbol?

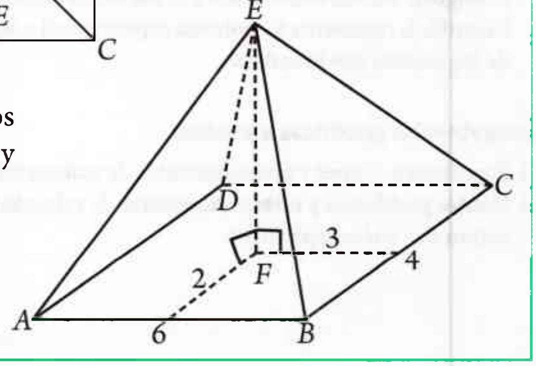
Problema 6. El ángulo de elevación de un barco a la punta de un faro de 50 m de alto situado en la costa es 13°. ¿Qué tan lejos de la costa se encuentra el barco?

Problema 6. $ABCD$ es un cuadrado unitario, ABE es un triángulo equilátero, y F es el punto de intersección de AC y $B\bar{E}$. Encontrar la medida de FC.



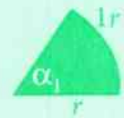
Problema 7. Encuéntrense las medidas de los ángulos siguientes para la pirámide que se muestra a la derecha y que tiene la base rectangular $ABCD$.

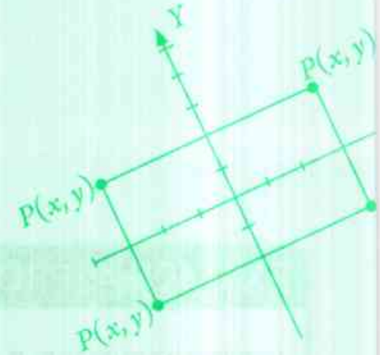
a) $\angle ADB$ d) $\angle BEC$
b) $\angle BEF$ e) $\angle ABE$
c) $\angle CBE$ f) $\angle AEB$



5 unidad

Funciones trigonométricas: aplicaciones de triángulos oblicuángulos





Propósito de unidad

Analiza las funciones trigonométricas y las aplica en la resolución de problemas de su entorno.

Indicadores de desempeño

- Define las funciones trigonométricas en el plano coordenado cartesiano.
- Identifica el signo de las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes.
- Reconoce y define ángulo de referencia.
- Determina el ángulo coterminal que corresponde a un ángulo igual o mayor a una revolución, o negativo.
- Realiza conversiones angulares del sistema sexagesimal al circular y viceversa.
- Dado el valor de una razón trigonométrica, determina el cuadrante en el que puede estar el lado final del ángulo correspondiente.
- Utiliza los valores exactos de las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°, para determinar los valores exactos de las funciones trigonométricas de ángulos múltiplos de dichos ángulos especiales.
- Determina el valor de funciones trigonométricas de ángulos cualesquiera expresados tanto en grados como en radianes.
- Representa gráficamente las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Utiliza las tecnologías de la información, para explorar las funciones trigonométricas: $y = c\,sen\,\theta$, $y = sen\,\theta + c$, $y = c\cos\theta$, $y = \cos\theta + c$, $y = c\tan\theta$, $y = \tan\theta + c$, $y = sen(\theta + c)$, $y = \cos(\theta + c)$ y $y = \tan(\theta + c)$.
- Aplica las diferentes identidades trigonométricas para expresar una razón en función de otra.
- Aplica las identidades de suma de ángulos para deducir las identidades de ángulos dobles, ángulos mitad y diferencia de ángulos.
- Resuelve ecuaciones trigonométricas sencillas del tipo $a\,sen\,x + b = c$, $a\cos x + b = c$ y $a\tan x + b = c$
- Resuelve triángulos cualesquiera aplicando leyes de senos y cosenos.
- Aplica la ley de senos y cosenos en la solución de problemas.

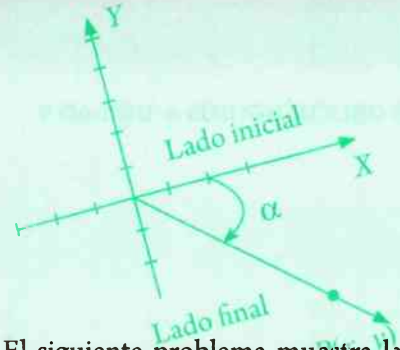
Competencias disciplinares a desarrollar

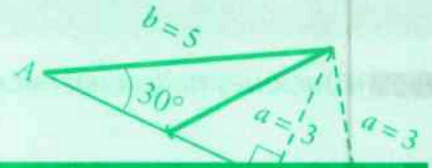
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y el conocimiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

Competencias genéricas a evaluar

5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva en la búsqueda y adqusición de nuevos conocimientos.

8.1 Plantea problemas y ofrece alternativas de solución al desarrollar proyectos en equipos de trabajo, y define un curso de acción con pasos específicos.



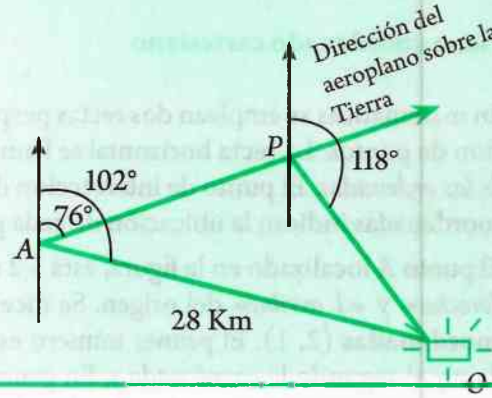


Actividad preliminar

¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

El siguiente problema muestra la utilización de algunos conceptos geométricos y trigonométricos, algunos ya estudiados y otros que estudiarás en esta unidad.

Problema. *El radio operador de un avión sabe, que al despegar del aeropuerto, el rumbo de una estación de radio, distante 28 Km, es de 102°. Después de volar durante 6 minutos en la dirección 76°, el rumbo de la estación es de 118°. Determinar la velocidad del avión respecto a la Tierra y su distancia a la estación de radio en el momento de la observación.*



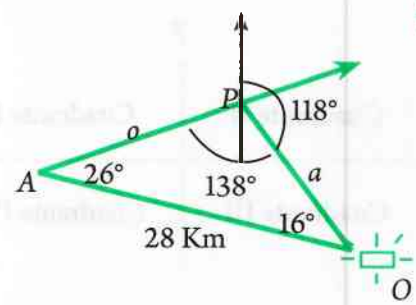
La actividad 1 consiste en que analices la solución planteada a continuación, y, con tus conocimientos previos, debes contestar lo que se te indica. Una vez que termines el estudio de la unidad vuelve a analizar esta actividad.

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Autoevaluación

Actividad 1

Comprueba que: $\angle APO = 138°$, $\angle PAO = 26°$ y $\angle AOP = 16°$.
Aplicando la **ley de los senos:**

$$\frac{sen\ 138°}{28} = \frac{sen\ 16°}{o}$$



Comprueba que: $o = \dfrac{28 \times sen\ 26°}{sen\ 138°} = 11.53$ Km

La velocidad del avión respecto a la Tierra es: $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{11.53\ Km}{6/60\ h} = 11.53$ Km

Para determinar la distancia del avión a la estación de radio en el momento de la observación, aplicamos la **ley de los senos:**

$$\frac{sen\ 138°}{28} = \frac{sen\ 26°}{a}$$

Comprueba que: $a = \dfrac{28 \times sen\ 26°}{sen\ 138°} = 18.3$ Km

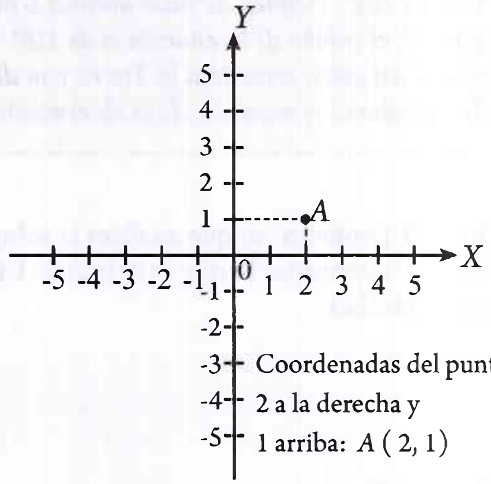
5.1 Ángulos de rotación

Estudia con atención la siguiente información:

Plano coordenado cartesiano

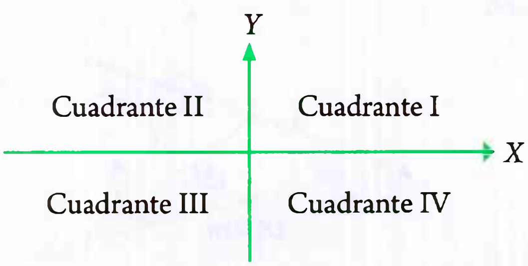
En matemáticas se emplean dos rectas perpendiculares numeradas para elaborar un método de localización de puntos. La recta horizontal se llama *eje X* o *eje de las abscisas*; la recta vertical se llama *eje Y* o *eje de las ordenadas*. El punto de intersección de las dos rectas se llama *origen*. Un par de números llamados coordenadas indican la ubicación de cada punto.

El punto *A* localizado en la figura, está «*2 unidades a la derecha*» y «*1 arriba*» del origen. Se dice que A tiene **coordenadas** (2, 1). El primer número es la *coordenada x* y el segundo la *coordenada y*. En general un punto se representa con las coordenadas (x, y). Se empleará la notación $P(x, y)$ para representar al punto P con las coordenadas (x, y). La primera coordenada «x» recibe el nombre de **abscisa** y la segunda coordenada «y» se denomina **ordenada.**



Coordenadas del punto *A*:
2 a la derecha y
1 arriba: *A* (2, 1)

Tal como ha sido construído, el plano cartesiano se divide en cuatro cuadrantes numerados en sentido antihorario. Los signos de cada coordenada para cualquier punto dependerá del cuadrante en donde se encuentre.



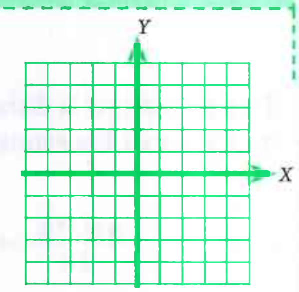
	Signo	
Cuadrante	*x* (abscisa)	*y* (ordenador)
I	+	+
II	–	+
III	–	–
IV	+	–

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 2

a) Localiza en el plano coordenado los siguientes puntos.

A (3, 5) *B* (4, 3) *C* (-3, 1) *D* (-4, -4)
E (3, -2) *F* (0, -3) *G* (-3, 6) *H* (4, -3)
I (4, 0) *J* (4, 0) *K* (-4, -2) *L* (3, -3).



b) Contesta correctamente:

¿En qué cuadrante tanto la abscisa como la ordenada son positivas?____________

¿En qué cuadrante tanto la abscisa como la ordenada son negativas?____________

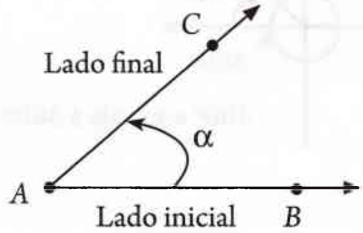
¿En qué cuadrante la abscisa es negativa y la ordenada positiva?____________

¿En qué cuadrante la abscisa es positiva y la ordenada negativa?____________

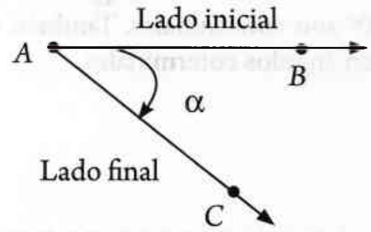
Estudia con atención la siguiente información relativa a ángulos de rotación:

Cuando un rayo $\overrightarrow{AB}$ gira alrededor de su origen A, hasta $\overrightarrow{AC}$, genera el **ángulo de rotación** α.

Si el rayo se mueve en dirección *contraria a las manecillas del reloj, el* ***ángulo es positivo,*** si se mueve en el mismo sentido de las manecillas, es **negativo.**



ángulo positivo

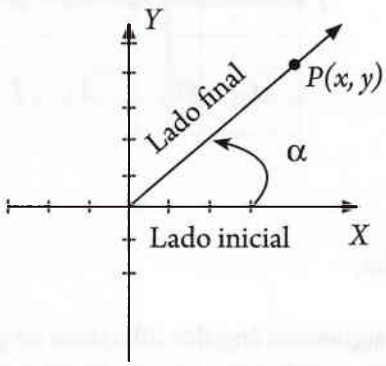


ángulo negativo

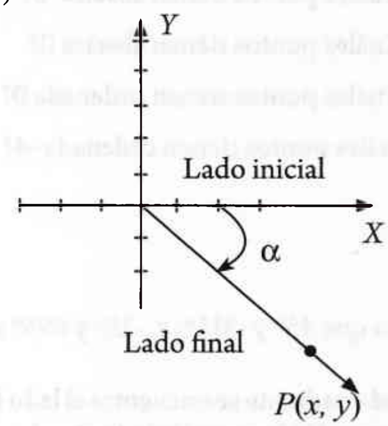
Ángulo en posición normal y ángulos coterminales

Un ángulo está en **posición normal** si su vértice es el origen y su lado inicial está sobre la parte positiva del eje X.

Puesto que el lado inicial de un ángulo en posición normal está sobre el *eje X* positivo, entonces el lado final estará en un rayo que une el origen con un punto $P(x, y)$.

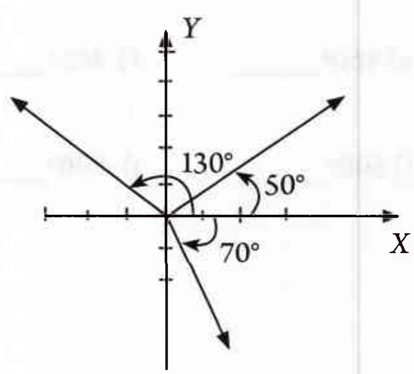


Ángulo en posición normal positivo.



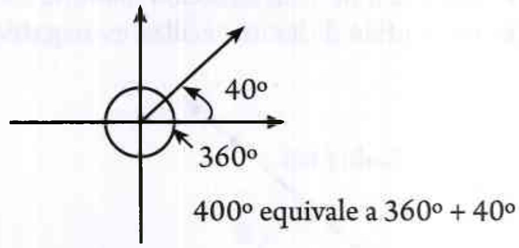
Ángulo en posición normal negativo.

Un ángulo entre 0° y 90°, en posición normal tiene su lado final en el primer cuadrante. Un ángulo comprendido entre 0° y 180° tiene su lado final en el segundo cuadrante. Un ángulo comprendido entre 0° y -90° tiene su lado final en el cuarto cuadrante y así sucesivamente.



Una revolución completa tiene una medida de 360°. Cuando la medida de un ángulo es mayor que 360°, el lado en rotación ha completado al menos una revolución. Por ejemplo, un águlo de 400° completa una revolución, quedando finalmente su lado terminal coincidiendo con el de 40°.

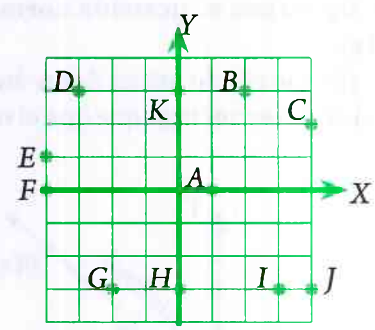
Los ángulos que están en posición normal y que coinciden sus lados finales se llaman **ángulos coterminales.** así, 400° y 40° son coterminales. También 45° y -315°; -25° y 695° son ángulos coterminales.



5.1 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.1 y 6

1. Tomando en cuenta el siguiente plano coordenado contesta la siguientes preguntas.
   a) ¿Qué puntos se localizan sobre el eje X?
   b) ¿Qué puntos aparecen en el tercer cuadrante?
   c) ¿Cuáles puntos tienen abscisa -3?
   d) ¿Cuáles puntos tienen abscisa 0?
   e) ¿Cuáles puntos tienen ordenada 0?
   f) Cuáles puntos tienen ordenada -4?



2. Verifica que 45° y -315°; y -25° y 695° son ángulos coterminales.

3. ¿En qué cuadrante se encuentra el lado final de cada uno de los siguientes ángulos dibujados en posición normal? Compruébalo haciendo el dibujo. Indica también en cada caso, un ángulo coterminal con el ángulo dado.

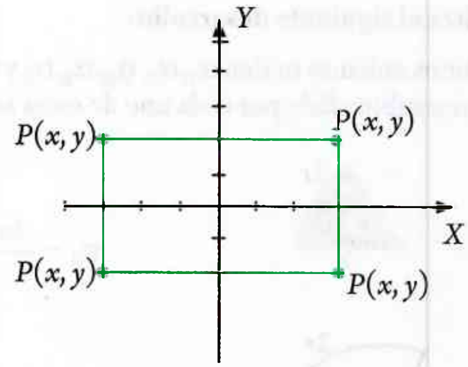
a) 53°_______ b) 253°_______ c) -126°_______ d) -373°_______

e) 460°______ f) 405°______ g) -32°______ h) 290°______

i) 500° ______ j) 800°______ k) 365° ______ l) -6°______

Observación: la notación $P(x, y)$, se usa para representar un punto genérico que puede estar en cualesquiera de los cuadrantes:

1er. cuadrante: $x = +, y = +$
2do. cuadrante: $x = -, y = +$
3er. cuadrante: $x = -, y = -$
4to. cuadrante: $x = +, y = -$

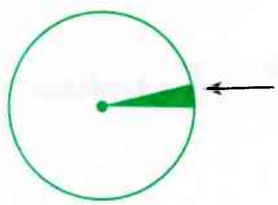


5.2 Radianes

Lee con atención:

En este curso, consideraremos dos formas de medir un ángulo de rotación:
Medida en grados: es la forma que hemos manejado hasta el momento. Recuerda que la circunferencia de un círculo se divide en 360 partes; por lo tanto, un ángulo de una vuelta mide 360°.
Un ángulo de $\frac{1}{2}$ vuelta mide 180°, de $\frac{1}{4}$ de vuelta mide 90°, y así sucesivamente.

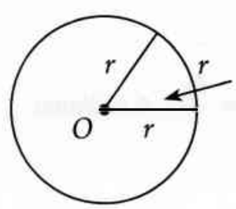
Un grado es $\frac{1}{360}$ del ángulo de una vuelta.



1 grado es = $\frac{1}{360}$ *parte de la circunferencia*

La circunferencia C *es cubierta por un ángulo con vértice en el centro de un círculo y con una medida de 360°.*

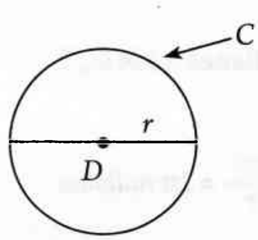
Medida en radianes*:* un radián es un ángulo que intercepta un arco de igual longitud que el radio del círculo.



1 *Radián*

$\frac{1}{360}$ *parte de la circunferencia*

Para relacionar al radián con el grado, debemos recordar que la **longitud de la circunferencia** es igual a $2\pi r$.



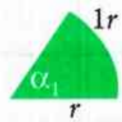
$$\frac{C}{D} = \pi$$

Por lo tanto:
$C = \pi D = \pi(2r) = 2\pi r$

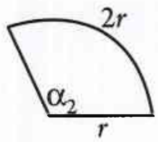
Surge ahora la pregunta: ¿Cuántos radios caben en una circunferencia?
Anota aquí tu estimación ________________________.

Analiza el siguiente desarrollo:

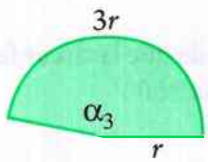
¿Cuántos radianes miden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ y α_6? Debemos averiguar cuántos radios caben en la longitud del arco subtendido por cada uno de estos ángulos.



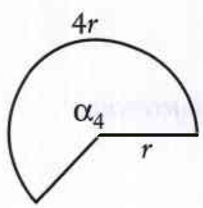
$$\alpha_1 = \frac{\textit{longitud de arco}}{\textit{radio}} = \frac{1r}{r} = 1 \textit{ radián}$$



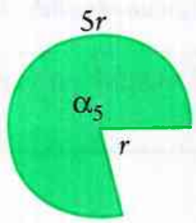
$$\alpha_2 = \frac{\textit{longitud de arco}}{\textit{radio}} = \frac{2r}{r} = 2 \textit{ radianes}$$



$$\alpha_3 = \frac{\textit{longitud de arco}}{\textit{radio}} = \frac{3r}{r} = 3 \textit{ radianes}$$

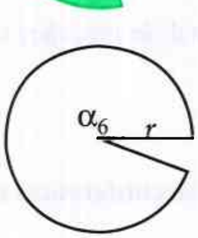


$$\alpha_4 = \frac{\textit{longitud de arco}}{\textit{radio}} = \frac{4r}{r} = 4 \textit{ radianes}$$

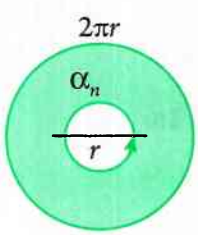


$$\alpha_5 = \frac{\textit{longitud de arco}}{\textit{radio}} = \frac{5r}{r} = 5 \textit{ radianes}$$

$$\alpha_6 = \frac{\textit{longitud de arco}}{\textit{radio}} = \frac{6r}{r} = 6 \textit{ radianes}$$



Finalmente, **¿Cuántos radianes mide** α_n **?**

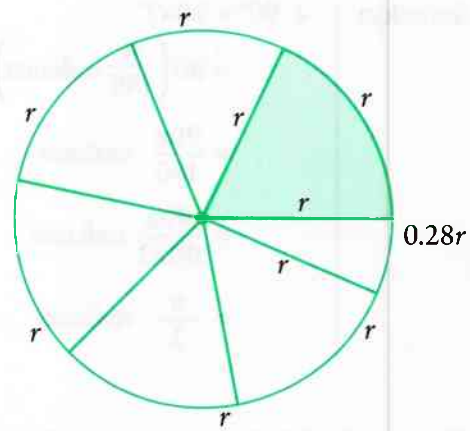


$$\alpha_7 = \frac{\textit{longitud de arco}}{\textit{radio}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \textit{ radianes}$$

Así pues, la medida de un ángulo de una vuelta completa de la circunferencia es igual 2π *radianes.*

En una circunferencia hay 2π *radianes.* Esto es:

$2(3.1416) = 6.2832$ *radianes.*



Pero, como una vuelta completa en una circunferencia es también de 360°, entonces podemos establecer las siguientes igualdades:

2π *radianes* = 360°

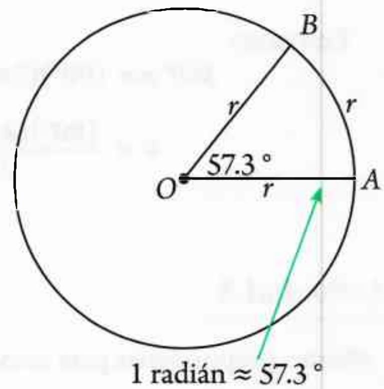
$$\frac{2\cancel{\pi}\ radianes}{2\cancel{\pi}} = \frac{360°}{2\pi}$$

360° = 2π *radianes.*

$$\frac{360°}{360} = \frac{2\pi\ radianes}{2\pi}$$

$$\boxed{1\ radián = \frac{180°}{\pi} = 57.3°}$$

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180°}\ \text{radianes}}$$



Para convertir los grados sexagesimales en radianes, es suficiente multiplicar por $\frac{\pi}{180}$

Para convertir los radianes en grados, es suficiente multiplicar por $\frac{180°}{\pi}$

Estudia los siguientes ejemplos de conversión de un ángulo expresado en grados a un ángulo expresado en radianes.

Ejemplo 1

Convertir en radianes:

a) 90°,
b) 180° y
c) 270°.

Solución

a. $90° = 90 \times 1°$

$= 90\left(\frac{\pi}{180}\ radianes\right)$

$= \frac{90\pi}{180}\ radianes$

$= \frac{\cancel{90}\pi}{\cancel{90} \times 2}\ radianes$

$= \frac{\pi}{2}\ radianes$

b. $180° = 180 \times 1°$

$= 180\left(\frac{\pi}{180}\ radianes\right)$

$= \frac{18\cancel{0}\pi}{180}\ radianes$

$= \pi\ radianes$

c. $270° = 270 \times 1°$

$= 270\left(\frac{\pi}{180}\ radianes\right)$

$= \frac{270\pi}{180}\ radianes$

$= \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{5}\pi}{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5}}$

$= \frac{3\pi}{2}\ radianes$

Un procedimiento alternativo consiste en aplicar una proporción: por ejemplo para convertir 90º a radianes, establecemos la proporción: «90º es a x, como 360º es a 2π radianes»:

$$\frac{90°}{x} = \frac{360°}{2\pi\ radianes}$$

Entonces:

$$360°\, x = (90°)(2\pi\ radianes)$$

$$x = \frac{(90°)(2\pi\ radianes)}{360°} = \frac{1\cancel{8}0°\ \pi\ radianes)}{2(1\cancel{8}0°)} = \frac{\pi}{2}\ radianes$$

Actividad 3

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Autoevaluación

Plantea proporciones para convertir 180º, 270º y 360º a radianes.

Ejemplo 2

Expresar en radianes 35° 30'.

Solución

Primeramente convertimos los minutos a fracción de grado:

$$35°\,30' = 35° + 30' = 35° + (30 \div 60)°$$
$$= 35° + 0.5°$$
$$= 35.5°$$

Ahora, convertimos 35.5° a radianes.

$$35.5° = 35.5 \times 1°$$

$$= 35.5\left(\frac{\pi}{180}\ radianes\right)$$

$$= \frac{35.5\pi}{180}\ radianes$$

$$= 0.1972\ \pi\ radianes$$

Estudia los siguientes ejemplos de conversión de un ángulo expresado en radianes a un ángulo expresado en grados (Aclaración: cuando un ángulo se expresa en función de π, por lo general se omite la palabra radián).

Ejemplo 1

Convertir en grados:

a) $\frac{\pi}{5}$ b) 3 *radianes*

Solución

a) $\frac{\pi}{5}\ radianes = \frac{\pi}{5} \times 1\ radián$

$$= \frac{\cancel{\pi}}{5} \times \frac{180°}{\cancel{\pi}} = \frac{180°}{5} = 36°$$

Otra forma:

Estableciendo la proporción: "$\frac{\pi}{5}$ *radianes* es a x, como 2π *radianes* es a 360°"

$$\frac{\frac{\pi}{5}\ radianes}{x} = \frac{2\pi\ radianes}{360°} \longrightarrow (2\pi\ radianes)(x) = (360°)\left(\frac{\pi}{5}\ radianes\right)$$

$$(2\pi\ radianes)(x) = \left(\frac{360°\ \pi\ \text{radianes}}{5}\right)$$

$$(2\pi\ radianes)(x) = (72°)(\pi\ \text{radianes})$$

$$x = \frac{72°\cancel{\pi}\ ra\cancel{di}anes}{2\cancel{\pi}\ ra\cancel{di}anes} = 36°$$

b) $3\ radianes = 3 \times 1\ radián$

$$= 3\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{540°}{\pi} = 171.89°$$

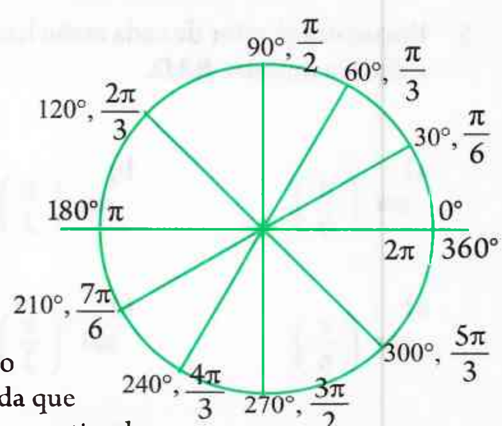
Otra forma:

Estableciendo la proporción: "3 *radianes* es a x, como 2π *radianes* es a 360°"

$$\frac{3\ radianes}{x} = \frac{2\pi\ radianes}{360°}$$

$$x = \frac{(3\ ra\cancel{di}anes)(360°)}{2\pi\ ra\cancel{di}anes} = \frac{540°}{\pi}$$

$$= 171.89°$$



El diagrama de la derecha, muestra una circunferencia marcando tanto en radianes como en grados algunos ángulos importantes. Recuerda que cuando un ángulo es expresado en función de π, se entiende que está en radianes.Comprueba las equivalencia mostradas.

Lee con atención. Para calcular el valor de las razones trigonométricas de un ángulo expresado en radianes, el procedimiento es idéntico al visto para ángulos expresados en grados sexagesimales. Lo único que debemos cuidar es que la calculadora muestre el modo ***RAD*** en vez de ***DEG.***

Por ejemplo, para determinar *sen* $\left(\frac{\pi}{3}\right)$, primero verificamos que la calculadora muestre ***RAD*** y procedemos como se indica:

sen	(	π	/	3	)	=	0.8666

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.1 y 6

5.2 EJERCICIOS

1. Convierte cada ángulo en radianes.
   a) 30º b) 45º c) 60º d) 135º
   e) 300º f) 25º g) 36º h) 150º
   i) 30º j) 45º k) 138º l) 330º

2. Convierte cada ángulo en radianes.
   a. 15° 30´ b. 85° 50´ c. 55° 35´

3. Convierte en grados.
   a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{3\pi}{5}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{4}$

   e) 2 radianes f) 2.5 radianes g) 1 radián h) 10 radianes.

4. Dibuja un ángulo aproximado a:
   a) 1 radián b) 2 radianes c) 5 radianes d) 6 radianes
   e) 1.5 radianes f) 2.25 radianes g) 3.5 radianes h) 4.5 radianes

5. Encuentra el valor de cada razón hasta la diez milésima más cercana. No olvides verificar que la calculadora muestre ***RAD.***

   a) $sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$ b) $sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$ c) $sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$ d) *sen* (3.5 *radianes*)

   e) $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ f) $cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ g) $cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ h) *cos* (3.5 *radianes*)

   i) $tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ j) $tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ c) $tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ d) *tan* (3.5 *radianes*)

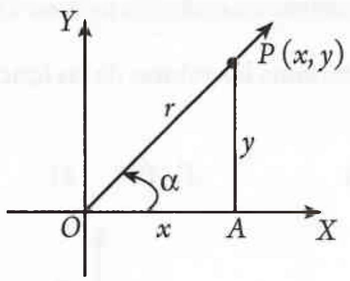
5.3 Definición general de las funciones trigonométricas

Lee con atención:

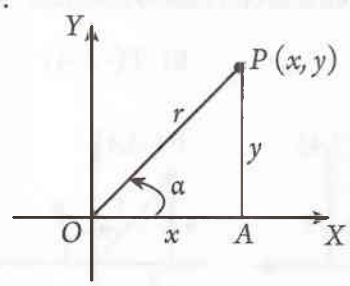
Las razones trigonométricas son funciones que describen relaciones entre los lados de los triángulos rectángulos y sus ángulos internos. Las razones trigonométricas se manejan como sinónimos de las funciones trigonométricas. Sin embargo, existen diferencias sutiles entre ambos conceptos.

En primer lugar, *la razón trigonométrica, tal como ha sido definida, está asociada a un triángulo rectángulo,* y por consiguiente, el ángulo que la genera está dentro del rango 0-90º, cosa que no ocurre cuando se maneja el concepto de *función.* Por otra parte, una razón trigonométrica específica puede interpretarse como un caso de relación entre los lados de un triángulo, en cambio, la **función trigonométrica** conceptualmente *hace un mayor énfasis en la relación de dependencia de las variables,* misma que puede ser expresada a través de alguna igualdad relacionada con las razones trigonométricas; integrando así, los dos conceptos básicos: razón trigonométrica y función en uno sólo.
A continuación, los conceptos seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante se vuelven a redefinir, ahora como funciones trigonométricas.

Consideremos el ángulo α con el punto $P(x, y)$ en lado terminal de α:



Puesto que el valor de las funciones trigonométricas, no depende de la longitud del rayo $\overrightarrow{OP}$, nos podemos limitar al triángulo ΔOAP.



En el triángulo rectángulo OAP se cumple que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

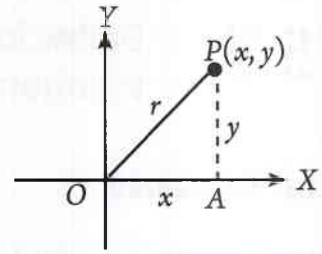
Las funciones trigonométricas para el ángulo α en posición normal, se definen de la siguiente manera:

$$sen\ \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{Hipotenusa}} = \frac{AP}{OP} \qquad cot\ \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{Cateto opuesto a } \alpha} = \frac{OA}{AP}$$

$$cos\ \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{Hipotenusa}} = \frac{OA}{OP} \qquad sec\ \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a } \alpha} = \frac{OP}{OA}$$

$$tan\ \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{Cateto adyacente a } \alpha} = \frac{AP}{OA} \qquad csc\ \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto a } \alpha} = \frac{OP}{AP}$$

Pero, $OA = x$, la *abscisa* del punto P,
$AP = y$, la *ordenada* del punto P, y
$OP = r$, la *distancia de P* al origen. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



Entonces, las nuevas definiciones para las funciones trigonométricas *en función de las coordenadas de un punto P (x, y)* son:

$$sen\ \alpha = \frac{\text{Ordenada de P}}{\text{distancia de P al origen}} = \frac{y}{r} \qquad cot\ \alpha = \frac{\text{Abscisa de P}}{\text{Ordenada de P}} = \frac{x}{y}$$

$$cos\ \alpha = \frac{\text{Abscisa de P}}{\text{distancia de P al origen}} = \frac{x}{r} \qquad sec\ \alpha = \frac{\text{Distancia de P al origen}}{\text{Abscisa de P}} = \frac{r}{x}$$

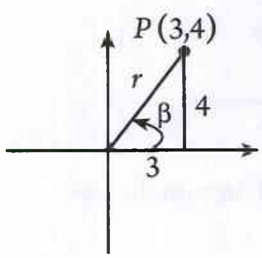
$$tan\ \alpha = \frac{\text{Ordenada de P}}{\text{Abscisa de P}} = \frac{y}{x} \qquad csc\ \alpha = \frac{\text{Distancia de P al origen}}{\text{Ordenada de P}} = \frac{r}{y}$$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 4

En cada inciso, $P(x, y)$ es un punto en el lado final del ángulo β. Determina los valores de las funciones trigonométricas con cuatro décimas.

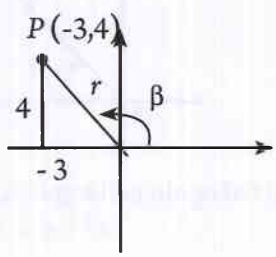
a) $P(3, 4)$



El valor de r es_____

$sen\ \beta =$ _______
$cos\ \beta =$ _______
$tan\ \beta =$ _______
$cot\ \beta =$ _______
$sec\ \beta =$ _______
$csc\ \beta =$ _______

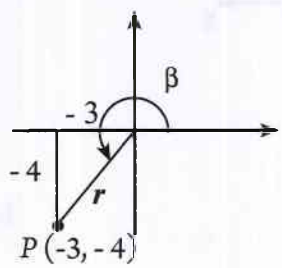
b) $P(-3, 4)$



El valor de r es_____

$sen\ \beta =$ _______
$cos\ \beta =$ _______
$tan\ \beta =$ _______
$cot\ \beta =$ _______
$sec\ \beta =$ _______
$csc\ \beta =$ _______

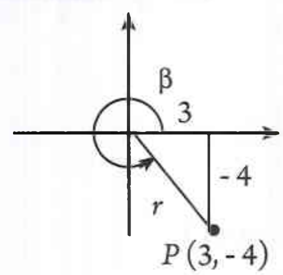
c) $P(-3, -4)$



El valor de r es_____

$sen\ \beta =$ _______
$cos\ \beta =$ _______
$tan\ \beta =$ _______
$cot\ \beta =$ _______
$sec\ \beta =$ _______
$csc\ \beta =$ _______

d) $P(3, -4)$



El valor de r es_____

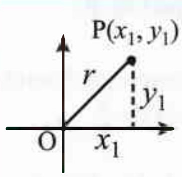
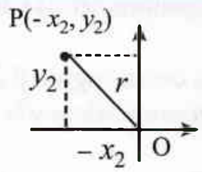
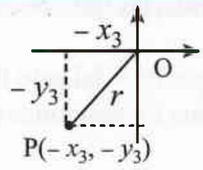
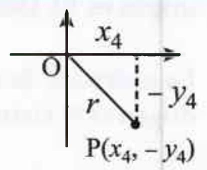
$sen\ \beta =$ _______
$cos\ \beta =$ _______
$tan\ \beta =$ _______
$cot\ \beta =$ _______
$sec\ \beta =$ _______
$csc\ \beta =$ _______

Lee con atención:

Signo de los valores de las funciones trigonométricas

En la actividad anterior, pudiste observar, que los valores de las funciones trigonométricas tienen signo positivo o negativo, el cual depende del cuadrante en donde quede el lado final del ángulo α. (No hay que olvidar que en estas nuevas definiciones, el lado inicial siempre será el semieje X positivo).

Determinaremos a continuación el signo de las funciones trigonométricas para un ángulo en posición normal en cada uno de los cuadrantes de un sistema de coordenadas cartesianas.

	1^er cuadrante	2^do cuadrante	3^er cuadrante	4^to cuadrante
Función				
Seno	$\frac{+y_1}{r} = +$	$\frac{+y_2}{r} = +$	$\frac{-y_3}{r} = -$	$\frac{-y_4}{r} = -$
Coseno	$\frac{+x_1}{r} = +$	$\frac{-x_2}{r} = -$	$\frac{-x_3}{r} = -$	$\frac{+x_4}{r} = +$
Tangente	$\frac{+y_1}{+x_1} = +$	$\frac{+y_2}{-x_2} = -$	$\frac{-y_3}{-x_3} = +$	$\frac{-y_4}{+x_4} = -$
Cotangente	$\frac{+x_1}{+y_1} = +$	$\frac{-x_2}{+y_2} = -$	$\frac{-x_3}{-y_3} = +$	$\frac{+x_4}{-y_4} = -$
Secante	$\frac{r}{+x_1} = +$	$\frac{r}{-x_2} = -$	$\frac{r}{-x_3} = -$	$\frac{r}{+x_4} = +$
Cosecante	$\frac{r}{+y_1} = +$	$\frac{r}{+y_2} = +$	$\frac{r}{-y_3} = -$	$\frac{r}{-y_4} = -$

Conclusión:

Signos de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes:

Cuadrante / Función	I	II	III	IV
Senos	+	+	−	−
Coseno	+	−	−	+
Tangente	+	−	+	−
Cotangente	+	−	+	−
Secante	+	−	−	+
Cosecante	+	+	−	−

Las funciones recíprocas *seno* y *cosecante, coseno* y *secante, tangente* y *cotangente,* **tienen el mismo signo.**

Con esta información, sólo necesitamos tener presente que, en cada cuadrante las funciones positivas son las indicadas:

Seno (+)	*Todas* (+)
Tangente (+)	*Coseno* (+)

5.3 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.1 y 6

1. $R(5, 8)$ es un punto del lado final de un ángulo α y $S(3, 6)$ es un punto del lado final de un ángulo β; ¿qué ángulo es mayor?

2. Las coordenadas de un punto P del lado final de un ángulo α son $(3, 7)$. Detremina las funciones trigonométricas y la medida de α.

3. La abscisa de un punto P del lado final de un ángulo β del primer cuadrante es 2, y su distancia al origen es 10. Determina las funciones trigonométricas y la medida de β.

4. La ordenada de un punto P del lado final de un ángulo β del primer cuadrante es 4, y su distancia al origen es 9. Determina las funciones trigonométricas y la medida de β.

5. Un punto P del lado final de un ángulo δ se encuentra a 10 unidades del origen. Si $\delta = 45°$, halla las coordenadas de P.

6. Un punto P del lado final de un ángulo de 56° 30' tiene abscisa 7, halla la ordenada de P y su distancia al origen.

7. Si $sen\ \alpha = -0.5$, ¿en qué cuadrantes puede estar el lado final de α? Haz un dibujo.

8. Si $cos\ \alpha = -0.8$, ¿en qué cuadrantes puede estar el lado final de α? Haz un dibujo.

9. Si $tan\ \alpha = -4$, ¿en qué cuadrantes puede estar el lado final de α? Haz un dibujo.

10. Si $sen\ \alpha = \frac{1}{5}$ ¿en qué cuadrantes puede estar el lado final de α? Haz un dibujo.

11. Si $tan\ \alpha = \frac{7}{2}$ ¿en qué cuadrantes puede estar el lado final de α? Haz un dibujo.

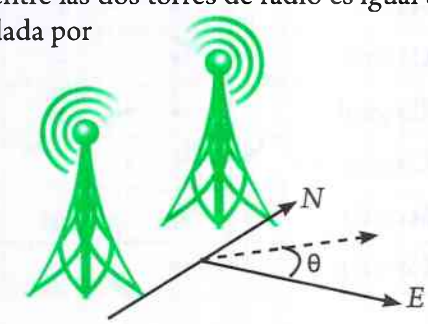
12. Si $cos\ \alpha = \frac{3}{10}$ ¿en qué cuadrantes puede estar el lado final de α? Haz un dibujo.

13. Las estaciones de radio a veces tienen más de una torre de transmisión, porque las normas federales no suelen permitir que una estación emita su señal en todas direcciones con igual potencia. Como las ondas de radio pueden cubrir grandes distancias, es importante controlar sus figuras direccionales para que las estaciones de radio no se interfieran unas a otras. Suponga que una estación de radio tiene dos torres de transmisión localizadas a lo largo de la línea norte-sur, como se ve en la figura. Si la estación está transmitiendo a una longitud λ y la distancia entre las dos torres de radio es igual a $\frac{1}{2}\lambda$, entonces la intensidad I de la señal en la dirección θ está dada por

$$I = \tfrac{1}{2} I_0 [1 + \cos(\pi \operatorname{sen} \theta)]$$

donde I_0 es la intensidad máxima. Calcula I en términos de I_0 para cada valor de θ.

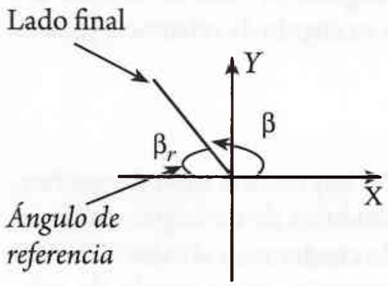
a) $\theta = 0$ b) $\theta = \pi/3$ c) $\theta = \pi/7$

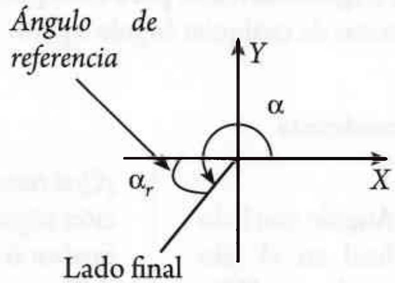


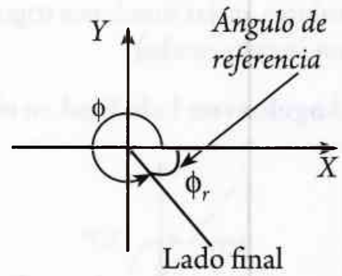
5.4 Funciones trigonométricas de ángulos mayores que 90° y negativos: Reducción de ángulos

Lee con atención:

El **ángulo de referencia o ángulo reducido**, es el ángulo agudo que forma el lado terminal de un ángulo en posición normal con el eje X de un sistema de coordenadas.







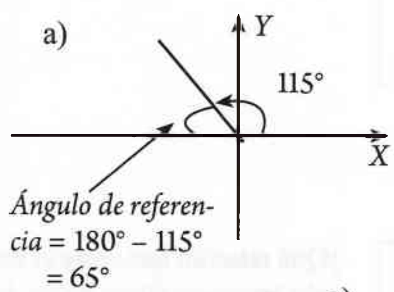
Completa: $\beta_r = 180° -$ ______ **Completa:** $\alpha_r = \alpha -$ ______ **Completa:** $\varphi_r = 360° -$ ______

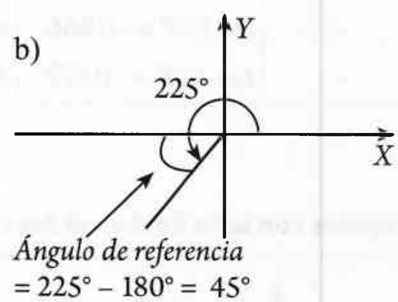
Ejemplos

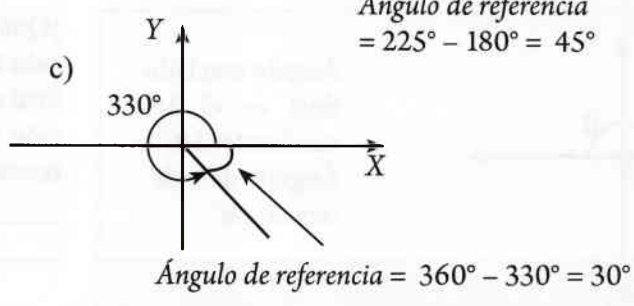
Encuentra el ángulo de referencia de cada ángulo:

a) 115° b) 225° c) 300

Solución







- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 5

Encuentra el ángulo de referencia correspondiente a cada uno de los siguientes ángulos:

a) 175° b) 255° c) 347°

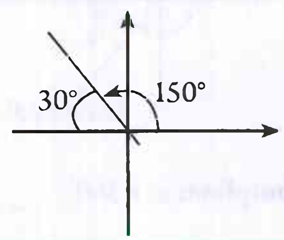
A continuación, estableceremos cómo se combinan los ángulos de referencia y los signos de las funciones trigonométricas en cada cuadrante. Ésto, nos permitirá hacer dos cálculos:

1. Calcular valores de razones trigonométrticas (sin necesidad de una calculadora científica) para cualquier ángulo mayor que 90°, y ángulos negativos.
2. Resolver ecuaciones trgonométricas.

El primer caso se desarrollará a continuación y el segundo en la próxima sección.

Cálculo de valores de funciones trigonométricas para cualquier ángulo. Se trata de calcular los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo a partir de su ángulo de referencia (que es un ángulo agudo).

Ángulos con lado final en el 2do cuadrante

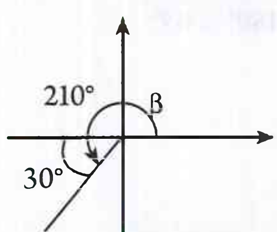


Ángulo con lado final en el 2do cuadrante: 150°. Ángulo de referencia: 30°

Signo de la función 2do cuadr.	Resultados con la calculadora	
+	*sen* 150° = 0.5	*sen* 30° = 0.5
–	*cos* 150° = - 0.866	*cos* 30° = 0.866
–	*tan* 150° = - 0.577	*tan* 30° = 0.577

¿Qué relación hay entre el valor de una función trigonométrica de un ángulo con lado final en el 2do cuadrante, y el valor de la función trigonométrica de su ángulo de referencia? ______________________________
____
____

Ángulos con lado final en el 3er cuadrante

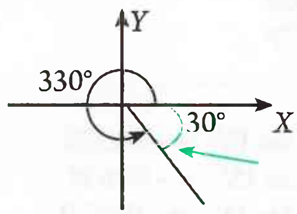


Ángulo con lado final en el 3er cuadrante: 210° Ángulo de referencia: 30°

Signo de la función 3er cuadr.	Resultados con la calculadora	
–	*sen* 210° = - 0.5	*sen* 30° = 0.5
–	*cos* 210° = - 0.866	*cos* 30° = 0.866
+	*tan* 210° = 0.577	*tan* 30° = 0.577

¿Qué relación hay entre el valor de una función trigonométrica de un ángulo con lado final en el 3er cuadrante, y el valor de la función trigonométrica de su ángulo de referencia? ______________________________
____
____

Ángulos con lado final en el 4to cuadrante



Ángulo con lado final en el 4to cuadrante: 330°
Ángulo de referencia: 30°

Signo de la función 4to cuadr.	Resultados con la calculadora	
–	*sen* 330° = – 0.5	*sen* 30° = 0.5
+	*cos* 330° = 0.866	*cos* 30° = 0.866
–	*tan* 330° = – 0.577	*tan* 30° = 0.577

¿Qué relación hay entre el valor de una función trigonométrica de un ángulo con lado final en el 4to cuadrante, y el valor de la función trigonométrica de su ángulo de referencia?

____

____

El análisis realizado para tres ángulos particulares (150°, 210° y 330°) lo usaremos de argumento para establecer la siguiente regla:

$$\left(\textit{Valor de la función del ángulo en posición normal}\right) = \left(\textit{signo de la función en el cuadrante}\right)\left(\textit{valor de la función del ángulo de referencia}\right)$$

Esta regla sólo es de utilidad si no se cuenta con una calculadora científica y necesitamos determinar valores de funciones trigonométricas de ángulos mayores que 90° con la simple ayuda de una tabla para ángulos agudos, o bien, cuando necesitamos valores exactos de valores de ángulos especiales mayores que 90°. Ésto, se ejemplificará a continuación.

Ejemplo 1

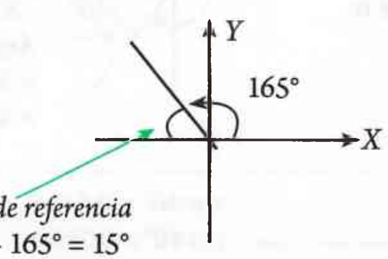
A través de un ángulo agudo, y con ayuda de la tabla adjunta, determina el seno, coseno y la tangente de 165°.

Medida de ángulos en grados	*sen A*	*cos A*	*tan A*
5	0.0872	0.9962	0.0875
10	0.1736	0.9848	0.1763
15	0.2588	0.9659	0.2679
20	0.3420	0.9397	0.3640
25	0.4226	0.9063	0.4663
30	0.5000	0.866	0.5774
35	0.5736	0.8192	0.7002
40	0.6428	0.7660	0.8391

Solución

Procedimiento

Primero encontramos el ángulo de referencia:



Ángulo de referencia
= 180° – 165° = 15°

A continuación obtenemos de la tabla, los valores de las funciones trigonométricas del *ángulo de referencia:* →

sen 15° = 0.2588
cos 15° = 0.9659
*tan*15° = 0.2679

Por último, igualamos los valores de las funciones trigonométricas del ángulo en cuestión (165°) con los valores correspondientes del ángulo de referencia (15°), pero *con el signo adecuado.* →

sen 165° = + *sen* 15° = + 0.2588
cos 165° = − *cos* 15° = − 0.9659
tan 165° = − *tan* 15° = − 0.2679
(2do cuadrante: *sen* = +, *cos* = −, *tan* = −)

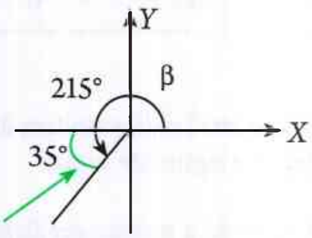
Ejemplo 2

A través de un ángulo agudo, y con ayuda de la tabla anterior, determina el seno, coseno y la tangente de 215°.

Solución

Procedimiento

Primero encontramos el ángulo de referencia:



Ángulo de referencia
= 215° − 180°
= 35°

Valores de las funciones trigonométricas del *ángulo de referencia:* →

sen 35° = 0.5736
cos 35° = 0.8192
tan 35° = 0.7002

Igualando los valores de las funciones trigonométricas de 215°con los valores correspondientes del ángulo de referencia (35°), pero *con el signo adecuado.* →

sen 215° = − *sen* 35° = − 0.5736
cos 215° = − *cos* 35° = − 0.8192
tan 215° = + *tan* 35° = + 0.7002
(3er. cuadrante: *sen* = −, *cos* = −, *tan* = +)

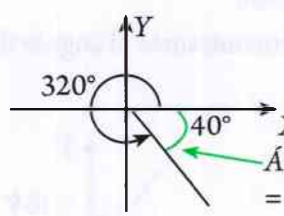
Ejemplo 3

A través de un ángulo agudo, y con ayuda de la tabla anterior, determina el seno, coseno y la tangente de 320°.

Solución

Procedimiento

Primero encontramos el ángulo de referencia.



Ángulo de referencia
= 360° − 320°
= 40°

Valores de las funciones trigonométricas del *ángulo de referencia:* →

sen 40° = 0.6428
cos 40° = 0.7660
tan 40° = 0.8391

Igualando los valores de las funciones trigonométricas de 320°con los valores correspondientes del ángulo de referencia (40°), pero *con el signo adecuado.*	$\longrightarrow$	*sen* 320° = – *sen* 40° = – 0.6428 *cos* 320° = + *cos* 40° = + 0.7660 *tan* 320° = – *tan* 40° = – 0.8391 (4to. cuadrante: *sen* = –, *cos* = +, *tan* = –)

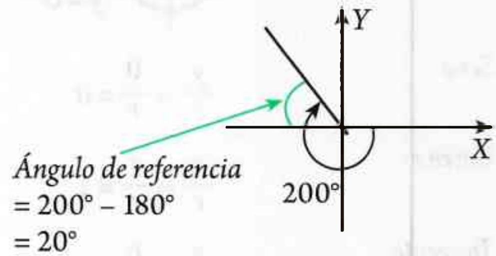
Ejemplo 4

A través de un ángulo agudo, encuentra el seno, coseno y la tangente de – 200°.

Solución

Procedimiento

Primero encontramos el ángulo de referencia:



Valores de las funciones trigonométricas del *ángulo de referencia:*	$\longrightarrow$	*sen* 20° = 0.3420 *cos* 20° = 0.9397 *tan* 20 = 0.3640
Igualando los valores de las funciones trigonométricas de 200°con los valores correspondientes del ángulo de referencia (20°), pero *con el signo adecuado.*	$\longrightarrow$	*sen* (-200°) = + 20° = + 0.3420 *cos* (-200°) = – *cos* 20° = – 0.9397 *tan* (-200°) = – *tan* 20° = – 0.3640 (2do. cuadrante: *sen* = +, *cos* = –, *tan* = –)

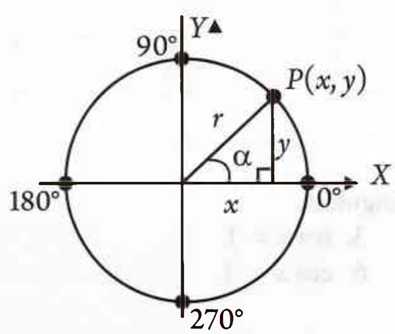
Ángulos con lado final sobre un eje coordenado

Si el lado final del ángulo se encuentra sobre uno de los ejes, las definiciones de las funciones siguen siendo válidas, aunque en algunos casos éstas no estarán definidas debido a que el denominador será cero.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 6

Imagina que un punto $P\ (x, y)$, recorre la circunferencia conforme el ángulo α cambia su medida. Observa las coordenadas de los puntos correspondientes a ángulos de 0°, 90°, 180° y 270° y completa:



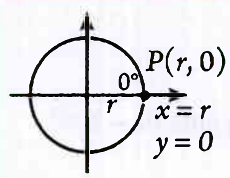
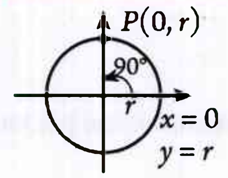
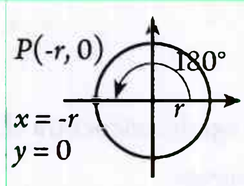
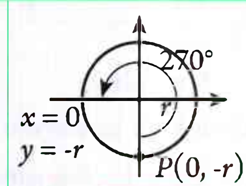
Si $\alpha = 0°$ $\longrightarrow$ $x =$ ___ $y =$ ___

Si $\alpha = 180°$ $\longrightarrow$ $x =$ ___ $y =$ ___

Si $\alpha = 90°$ $\longrightarrow$ $x =$ ___ $y =$ ___

Si $\alpha = 270°$ $\longrightarrow$ $x =$ ___ $y =$ ___

Ahora, a partir de las definiciones de las funciones trigonométricas, determinaremos los valores de éstas para 0°, 90°, 180° y 270°:

	0°	90°	180°	270°
Función				
Seno	$\frac{y}{r}=\frac{0}{r}=0$	$\frac{y}{r}=\frac{r}{r}=1$	$\frac{y}{r}=\frac{0}{r}=0$	$\frac{y}{r}=\frac{-r}{r}=-1$
Coseno	$\frac{x}{r}=\frac{r}{r}=1$	$\frac{x}{r}=\frac{0}{r}=0$	$\frac{x}{r}=\frac{-r}{r}=-1$	$\frac{x}{r}=\frac{0}{r}=0$
Tangente	$\frac{y}{x}=\frac{0}{r}=0$	$\frac{y}{x}=\frac{r}{0}$ = indefinido	$\frac{y}{x}=\frac{0}{-r}=0$	$\frac{y}{x}=\frac{-r}{0}$ = indefinido
Cotangente	$\frac{x}{y}=\frac{r}{0}$ = indefinido	$\frac{x}{y}=\frac{0}{r}=0$	$\frac{x}{y}=\frac{-r}{0}$ = indefinido	$\frac{x}{y}=\frac{0}{-r}=0$
Secante	$\frac{r}{x}=\frac{r}{r}=1$	$\frac{r}{x}=\frac{r}{0}$ = indefinido	$\frac{r}{x}=\frac{r}{-r}=-1$	$\frac{r}{x}=\frac{r}{0}$ = indefinido
Cosecante	$\frac{r}{y}=\frac{r}{0}$ = indefinido	$\frac{r}{y}=\frac{r}{r}=1$	$\frac{r}{y}=\frac{r}{0}$ = indefinido	$\frac{r}{y}=\frac{r}{-r}=-1$

Los valores correspondientes a 360° coinciden con los de 0°.

Actividad 7

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

a) Completa la tabla:

	seno	*coseno*	*tangente*	*cotangente*	*secante*	*cosecante*
0°						
90°						
180°						
270°						
360°						

b) Utiliza tu calculadora para encontrar en cada caso el valor del ángulo x.

1. $sen\ x = 0$
2. $sen\ x = 1$
3. $sen\ x = -1$
4. $cos\ x = 0$
5. $\cos x = 1$
6. $\cos x = -1$
7. $tan\ x = 0$

5.4 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.1 y 6

1. **Utiliza la siguiente tabla de valores exactos para ángulos notables, para hallar los valores de la función trigonométrica de los ángulos que se indican.**

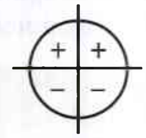
Ángulo	*seno*	*coseno*	*tangente*	*cotangente*	*secante*	*cosecante*
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ángulo	*seno*	*coseno*	*tangente*	*cotangente*	*secante*	*cosecante*
150°						
210°						
330°						
135°						
225°						
120°						
240°						
300°						
315°						
-210°						
-135°						

5.5 Ecuaciones trigonométricas sencillas

La interpretación de los signos de las funciones trigonométricas, es la clave para resolver ecuaciones trigonométricas. Por tanto, la discusión sobre este tema, consistirá básicamente en ayudarte en esa interpretación.

Función seno: positivo en el 1er y 2 do cuadrante; negativo en 3ro y 4to.



seno

Ejemplo 1

¿Cuánto vale α si *sen* $\alpha = +0.5736$?

Solución

Si *sen* α es positivo, el ángulo α toma dos valores entre 0° y 360°: uno con lado final en el primer cuadrante y el otro con lado final en el segundo cuadrante.

Procedimiento

Paso 1. Localiza los lados finales. A partir del signo de la función dada, localiza en qué cuadrantes están los lados finales de los ángulos solución.

Dato: *sen* $\alpha = +0.5736$

El seno es positivo en el 1er y 2do cuadrantes

Paso 2. Utiliza la calculadora. Ya sabes que la calculadora proporciona un valor mediante la siguiente instrucción:

$\boxed{Shift}\ \boxed{sin}\ \boxed{0.5736}\ \boxed{=}$ $\longrightarrow$ La respuesta es $\alpha = 35°$.

Pero, ahora sabemos que esta no es la única solución. ¿Cómo encontrar los dos ángulos (entre 0° y 360°) cuyo *seno* es 0.5736? Puedes continuar con los pasos siguientes:

Paso 3. Asigna correctamente el valor obtenido con la calculadora. Dependiendo de la función, *hay dos opciones para el valor proporcionado por la calculadora: se asigna de manera directa a uno de los ángulos buscados, y al ángulo de referencia del otro, o bien, será ángulo de referencia para ambas soluciones* (para decidir ésto, deberás observar las figuras del paso 1 y aplicar tu criterio).

El ángulo obtenido de 35°, debe colocarse en ambas gráficas del paso 1.

En este ejemplo, observamos que 35°, coincide con α_1 y es ángulo de referencia para α_2.

Entonces:

$\alpha_1 = 35°$

$\alpha_2 = 180° - 35° = 145°$

Paso 4. Comprueba que si *sen* $\alpha = +0.5736$, entonces $\alpha_1 = 35°$ y $\alpha_2 = 145°$.

sen 35° = ________

sen 145° = ________

Ejemplo 2

¿Cuánto vale α si *sen* $\alpha = -0.5736$?

Solución

Si *sen* α es negativo, el ángulo α toma dos valores entre 0° y 360°: uno con lado final en el tercer cuadrante y el otro con lado final en el cuarto cuadrante.

Procedimiento

Paso 1. Localiza los lados finales. A partir del signo de la función dada, localiza en qué cuadrantes están los lados finales de los ángulos solución.

Dato: *sen* $\alpha = -0.5736$

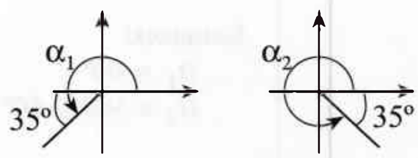
El seno es negativo en el 3er y 4to cuadrantes

Paso 2. Utiliza la calculadora.

Shift | sin | -0.5736 | = → La respuesta es $\alpha = -35°$.

Paso 3. Asigna correctamente el valor obtenido con la calculadora. (Ignora el signo negativo).

En este caso, se proporciona un ángulo negativo, pero para el procedimiento que estamos siguiendo, ésto es irrelevante por lo que debemos ignorar el signo menos. Observamos que tanto para α_1 como para α_2, 35° es un ángulo de referencia.



Entonces:

$\alpha_1 = 180° + 35° = 215°$

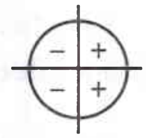
$\alpha_2 = 360° - 35° = 325°$

Paso 4. Comprueba que si sen $\alpha = -0.5736$, entonces $\alpha_1 = 215°$ y $\alpha_2 = 325°$.

sen 215° = ________

sen 325° = ________

Función coseno: positivo en el 1er y 4to cuadrante; negativo en el 2do y 3ro.



coseno

Ejemplo 3

¿Cuánto vale α si $\cos \alpha = 0.5$?

Solución

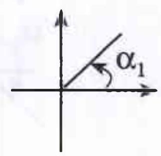
Si $\cos \alpha$ es positivo, el ángulo α toma dos valores entre 0° y 360°: uno con lado final en el primer cuadrante y el otro con lado final en el cuarto cuadrante.

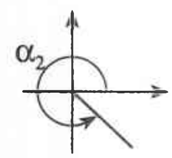
Procedimiento

Paso 1. Localiza los lados finales. El signo nos indica que uno de los ángulos tiene su lado final en el 1er cuadrante y el otro en el 4to:

Dato: $\cos \alpha = +\,0.5$

↓ *El coseno es positivo en el 1er y 4to cuadrantes*



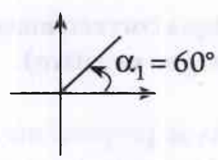


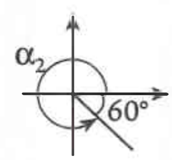
Paso 2. Utiliza la calculadora.

[*Shift*] [*cos*] [0.5] [=] ⟶ La respuesta es $\alpha = 60°$.

Paso 3. Asigna correctamente el valor obtenido con la calculadora.

En este ejemplo, observamos que 60°, coincide con α_1 y es ángulo de referencia para α_2.





Entonces:

$\alpha_1 = 60°$

$\alpha_2 = 360° - 60° = 300°$

Paso 4. Comprueba que si $\cos \alpha = +\,0.5$, entonces $\alpha_1 = 60°$ y $\alpha_2 = 300°$.

$\cos 60° =$ ________

$\cos 300° =$ ________

Ejemplo 4

¿Cuánto vale α si $\cos \alpha = -\,0.5$?

Solución

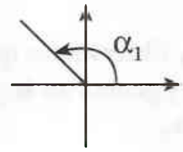
Si $\cos \alpha$ es negativo, el ángulo α toma dos valores entre 0° y 360°: uno con lado final en el segundo cuadrante y el otro con lado final en el tercer cuadrante.

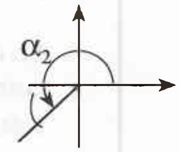
Procedimiento

Paso 1. Localiza los lados finales. El signo nos indica que uno de los ángulos tiene su lado final en el 2do cuadrante y el otro en el 3ro:

Dato: $cos\ \alpha = -0.5$

↓ *El coseno es negativo en el 2do y 3er cuadrantes*



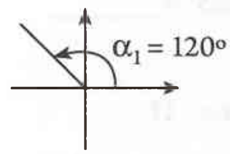


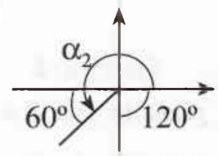
Paso 2. Utiliza la calculadora.

[*Shift*] [*cos*] [-0.5] [=] ⟶ La respuesta es $\alpha = 120°$.

Paso 3. Asigna correctamente el valor obtenido con la calculadora.

En este ejemplo, observamos que 120°, coincide con α_1 y es un caso especial de ángulo de referencia para α_2.





Entonces:

$\alpha_1 = 120°$

$\alpha_2 = 180° + 60° = 240°$

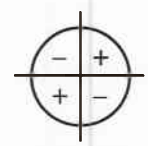
Paso 4. Comprueba que si $cos\ \alpha = -0.5$, entonces $\alpha_1 = 120°$ y $\alpha_2 = 240°$.

$cos\ 120° =$ ________

$cos\ 240° =$ ________

Atención: el ángulo obtenido con la calculadora, tiene que colocarse en ambas gráficas. En este caso, dicho ángulo, no es un ángulo de referencia directo para α_2.

Función tangente: positivo en el 1er y 3er cuadrante; negativo en el 2do y 4to.



tangente

Ejemplo 5

¿Cuánto vale α si $tan\ \alpha = 0.5$?

Solución

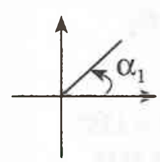
Si $tan\ \alpha$ es positivo, el ángulo α toma dos valores entre 0° y 360°: uno con lado final en el primer cuadrante y el otro con lado final en el tercer cuadrante.

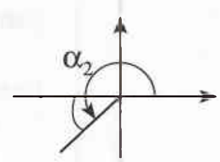
Procedimiento

Paso 1. Localiza los lados finales. El signo nos indica que uno de los ángulos tiene su lado final en el 1er cuadrante y el otro en el 3er:

Dato: $tan\ \alpha = +1$

↓ *La tangente es positiva en el 1er y 3er cuadrantes*



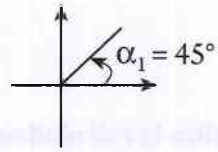


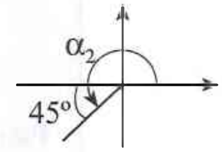
Paso 2. Utiliza la calculadora.

[*Shift*] [*tan*] [1] [=] ⟶ La respuesta es $\alpha = 45°$.

Paso 3. Asigna correctamente el valor obtenido con la calculadora, en la gráfica de α_1 y en la de α_2.

En este ejemplo, observamos que 45°, coincide con α_1 y genera un ángulo de referencia para α_2.





Entonces:

$\alpha_1 = 45°$

$\alpha_2 = 180° + 45° = 225°$

Paso 4. Comprueba que si *tan* $\alpha = 1$, entonces $\alpha_1 = 45°$ y $\alpha_2 = 225°$.

tan 45° = ________

tan 225° = ________

Ejemplo 6

¿Cuánto vale α si *tan* $\alpha = -1$?

Solución

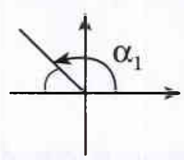
Si *tan* α es negativo, el ángulo α toma dos valores entre 0° y 360°: uno con lado final en el segundo cuadrante y el otro con lado final en el cuarto cuadrante.

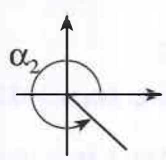
Procedimiento

Paso 1. Localiza los lados finales. El signo nos indica que uno de los ángulos tiene su lado final en el 2do cuadrante y el otro en el 4to:

Dato: *tan* $\alpha = -1$

↓ *La tangente es negativa en el 2do y 4to cuadrantes*



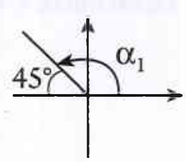


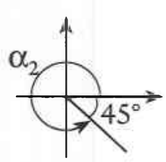
Paso 2. Utiliza la calculadora.

[Shift] [tan] [-1] [=] ⟶ La respuesta es $\alpha = -45°$.

Paso 3. Asigna correctamente el valor obtenido con la calculadora en la gráfica de α_1 y en la de α_2. (Ignora el signo negativo de 45°).

En este ejemplo, observamos que 45°, es ángulo de referencia tanto para α_1 como para α_2.





Entonces:

$\alpha_1 = 180° - 45° = 135°$

$\alpha_2 = 360° - 45°\ 315°$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación trigonométrica: $4\ sen\ x - 2 = 0$

Solución

En la solución de las ecuaciones trigonométricas se aplican los mismos métodos estudiados en álgebra; estos métodos, nos permiten transformar la ecuación dada, en una de las expresiones que ya aprendiste a resolver en los ejemplos 1 a 6 previos inmediatos. Estudia el siguiente procedimiento:

Procedimiento

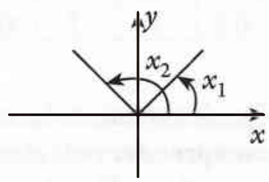
Paso 1. Aplicamos el álgebra para simplificar la expresión dada:

$$4\ sen\ x - 2 = 0$$
$$4\ sen\ x = 2$$
$$sen\ x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Paso 2. Ahora, debemos aplicar nuestro conocimiento trigonométrico para encontrar los valores que toma el ángulo x, tal que $sen\ x = 0.5$.

Dado: $sen\ x = +\ 0.5$.

$\downarrow$ El seno es positivo en el 1er y 2do cuadrantes.



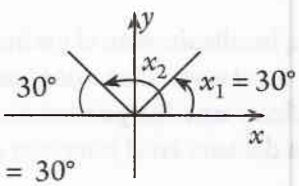
Resultado proporcionado por la *calculadora:*

$sen\ x = +\ 0.5.$

$x = sen^{-1}(0.5) = 30°$

Interpretación del resultado anterior:

30° corresponde a x_1 y es ángulo de referencia para x_2.



Entonces: $x_1 = 30°$

$x_2 = 180° - 30° = 150°$

Comprueba estas soluciones en la ecuación original.

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.1 y 6

5.5 EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas para los valores no negativos de la incógnita, menores que 360º.

1. $cos\ \alpha = 0.6921$
2. $sen\ \alpha = 0.8965$
3. $cos\ \alpha = 0.9648$
4. $tan\ \alpha = 1.37$
5. $sen\ \alpha = 0.5140$
6. $tan\ \alpha = 5.005$
7. $2\ sen\ \alpha - 1 = 0$
8. $2\ sen\ \alpha - \sqrt{3} = 0$
9. $2\ cos\ \alpha + \sqrt{3} = 0$
10. $3\ tan\ \alpha - \sqrt{3} = 0$
11. $3\ tan\ \alpha + \sqrt{3} = 0$
12. $2\ sen\ \alpha - \sqrt{2} = 0$
13. $2\ cos\ \alpha - \sqrt{2} = 0$

5.6 Gráficas de las funciones trigonométricas *seno, coseno y tangente*

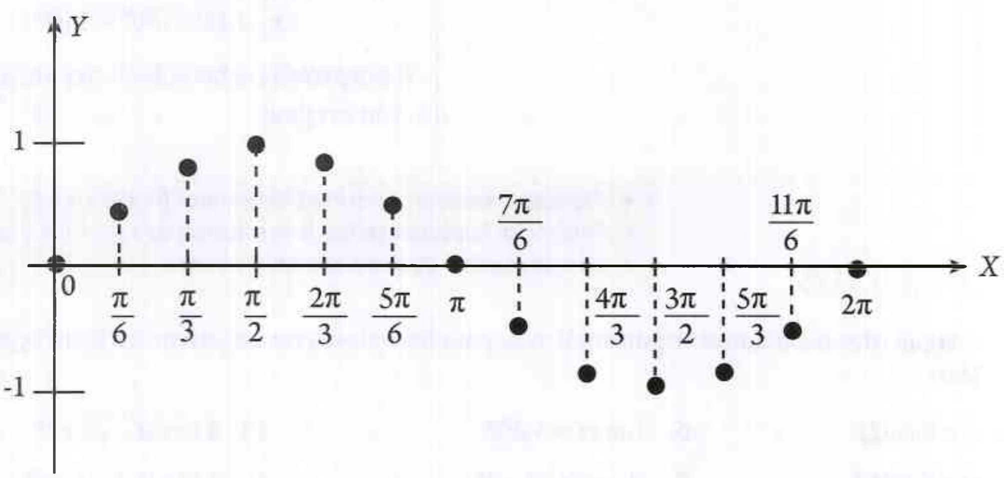
Lee con atención el desarrollo que te permitirá graficar la función seno.

Graficar la función *seno*, significa trazar la gráfica correspondiente a la ecuación $y = sen\ x$. Recuerda que en ecuaciones como ésta, al sustituir valores de x, se calculan valores correspondientes de y. Es decir, *existe una dependencia* entre los valores de y y los de x. Es, esencialmente por esta dependencia, que se llama función seno. Cada pareja de valores forman un *par ordenado* (x, y). Estas parejas ordenadas, se colocan en un *plano coordenado cartesiano* donde la x será la abscisa y, y la ordenada; posteriormente unimos estos puntos, con lo cual obtenemos la gráfica de la ecuación, en este caso de $y = sen\ x$.

La notación $y = sen\ x$, generalmente indica que x está expresada en *radianes*. Por ello, primeramente debes **recordar** que todo ángulo expresado en grados puede convertirse en radianes y viceversa. También, debes recordar, cómo usar la calculadora para determinar los valores de las funciones trigonométricas. **Completa** la siguiente tabla haciendo las conversiones requeridas y determina los valores de la función trigonométrica *seno*.

Grados	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Radianes (x)	0	$\frac{\pi}{6}$	?	?	$\frac{2\pi}{6}$	?	?	?	$\frac{4\pi}{6}$	?	?	?	?
$y = sen\ x$	0	0.5	0.866	?	?	?	?	-0.5	?	?	-0.866	?	?

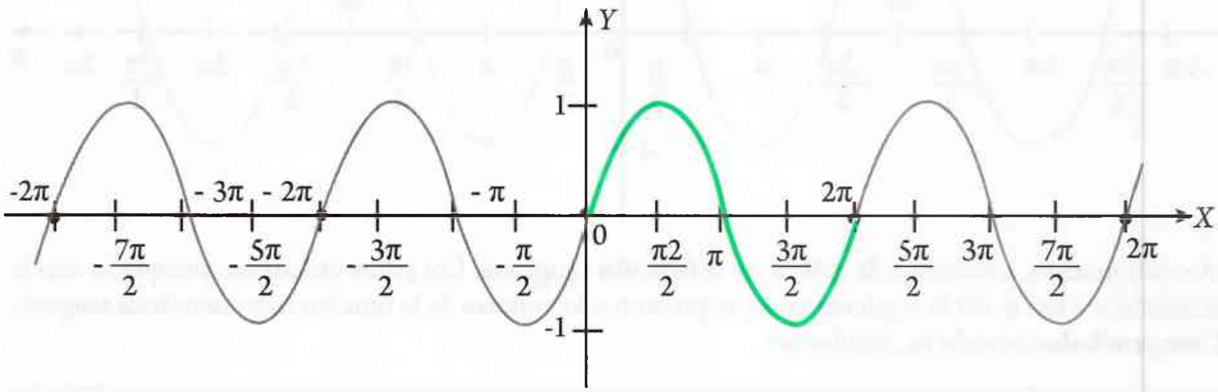
Ahora, localizamos en el eje horizontal las medidas angulares (preferentemente las expresadas en radianes) y en el vertical su valor correspondiente para y. **Trata de comprender** cada elemento de la siguiente gráfica y **une los puntos consecutivos** con un trazo suave y continuo. De esta manera, obtendrás la gráfica del *seno* en el intervalo de 0 a 2π radianes.



Lee con atención el significado de periodo:

Una característica relevante de las funciones trigonométricas, es que sus gráficas consisten de una misma porción o ***ciclo*** que se *repite periódicamente.*

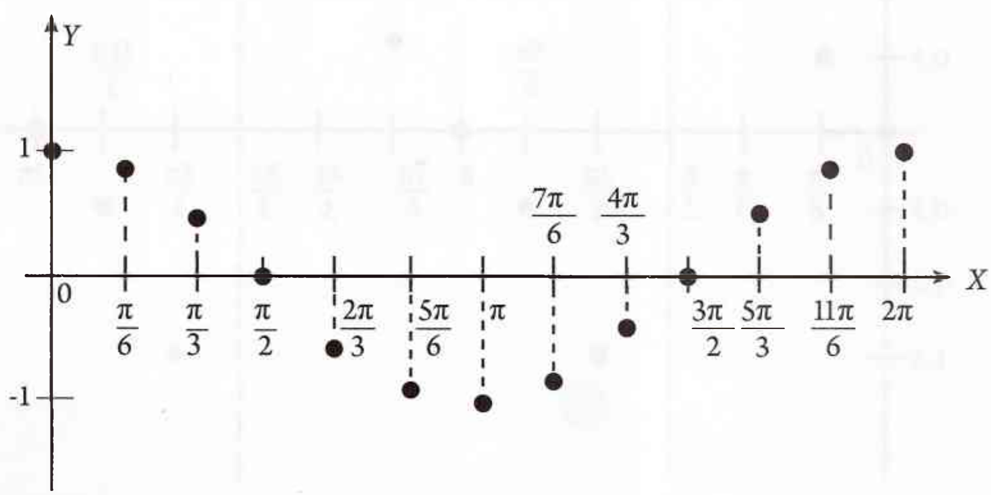
Se llama **periodo** al tramo del eje ***x*** en donde se halla un ciclo de la gráfica. El periodo del *seno* es 2π, por lo que decimos que la función *seno* es periódica con periodo 2π. Esto significa que la gráfica entre 0 y 2π ya realizada, se repite siguiendo el mismo modelo a la derecha y a la izquierda de dicho trazo, como se observa a continuación:



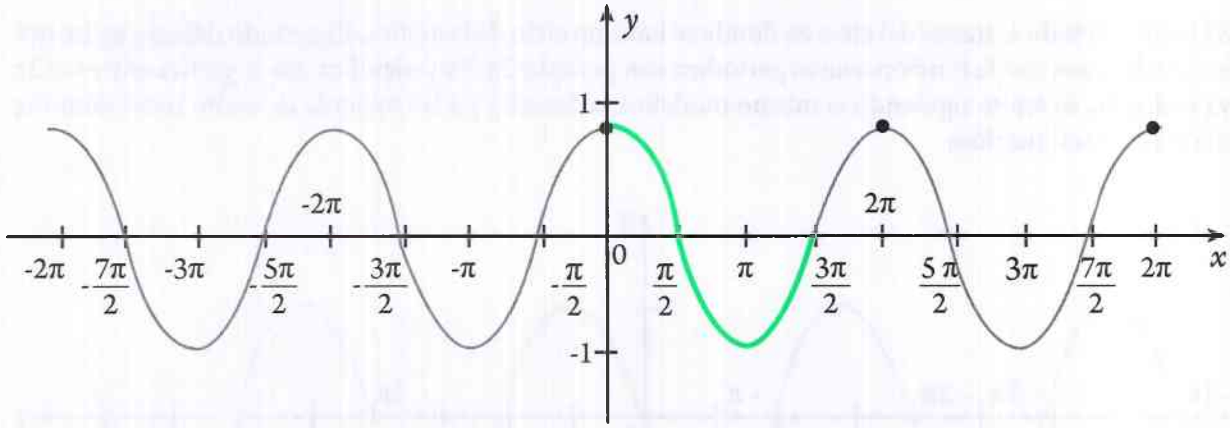
Teniendo en cuenta las mismas consideraciones anteriores, se puede trazar la gráfica de la **función coseno**. Ahora los pares ordenados cumplirán con la ecuación $y = cos\ x$. En la siguiente tabla, **determina los valores faltantes** de la función trigonométrica *coseno.*

Grados	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Radianes (x)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	2π
$y = sen\ x$	0	0.866	?	?	?	?	?	-0.866	?	?	?	?	?

Ahora, trata de comprender cada elemento de la siguiente gráfica y **une los puntos** con un trazo suave y continuo. De esta manera, obtendrás la gráfica del *coseno* en el intervalo de 0 a 2π radianes.

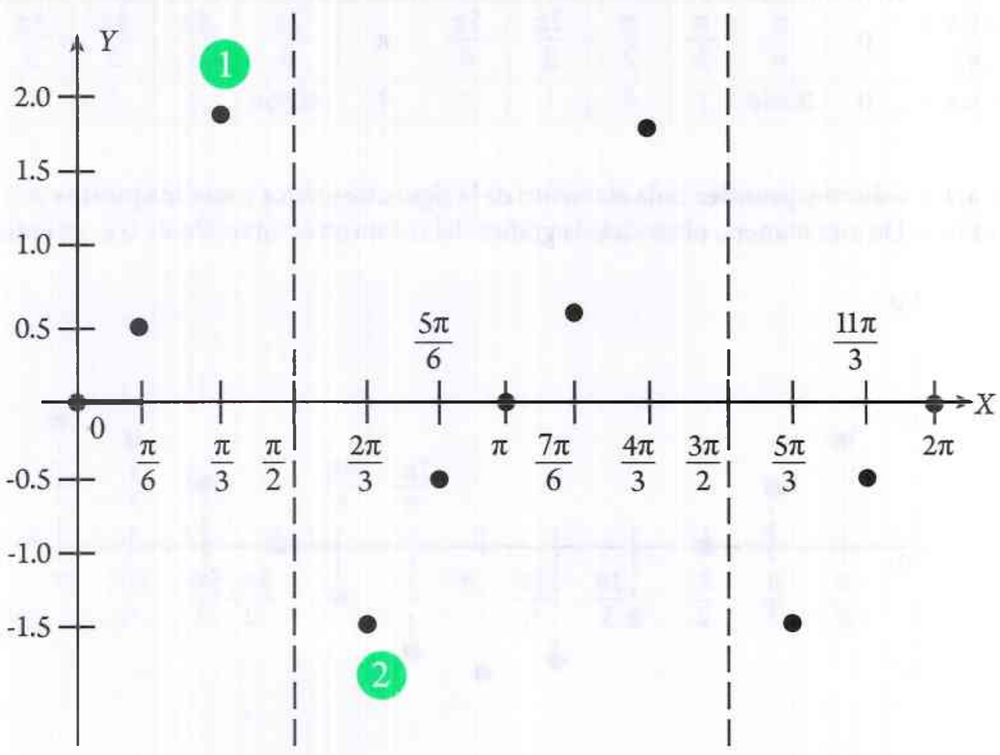


Al igual que para el *seno,* **el periodo del *coseno* es 2π;** así pues, la gráfica entre 0 y 2π ya realizada, se repite siguiendo el mismo modelo a la derecha y a la izquierda de dicho trazo, como se observa a continuación:



A continuación, trazaremos la gráfica de la **función tangente**. Los pares ordenados cumplirán con la ecuación ***y* = *tan x*.** En la siguiente tabla, se presentan los valores de la función trigonométrica *tangente*. **Compruébalos** usando tu calculadora.

Grados	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Radianes (x)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = tan\, x$	0	0.58	1.73	*no def.*	-1.73	-0.58	0	0.58	1.73	*no def.*	-1.73	-0.58	0



¿Cómo trazar la curva?

Observa que a diferencia del seno y coseno, aquí no se aprecia de manera directa un patrón definido. **¿Podemos unir los puntos 1 y 2?** Debemos tener muy presente que la función tangente, no está definida para $\frac{\pi}{2}$.

Por lo tanto, no existe ningún punto arriba de $\frac{\pi}{2}$ por lo que, no pueden conectarse los puntos 1 y 2. Lo mismo puede decirse para $\frac{3\pi}{2}$ y sus puntos vecinos.

Vamos a revisar qué sucede con valores cercanos a $\frac{\pi}{2} = 90°$.

Comprueba los siguientes valores:

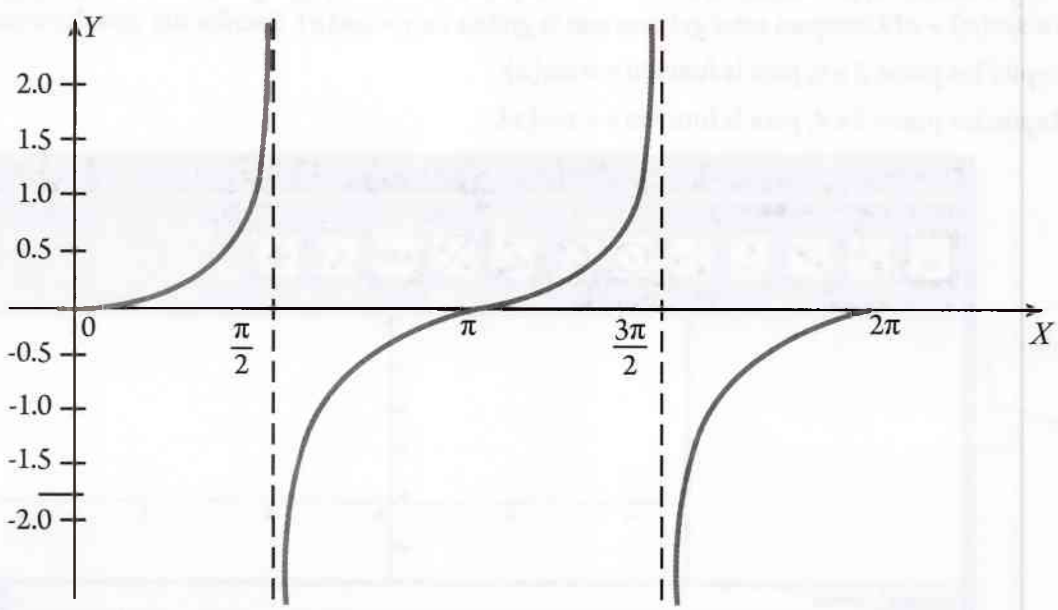
$tan\ 83° = 8.1$
$tan\ 84° = 9.5$
$tan\ 85° = 11.4$
$tan\ 88° = 28.6$
$tan\ 89° = 57.3$
$tan\ 89.9° = 573$
$tan\ 89.99° = 5729.5$
$tan\ 89.999° = 57295$

¿Qué valor crees que tiene *tan* 89.99999999?_______________

Observando lo anterior, notamos que el valor de $y = tan\ x$ crece sin límite cuando los valores de x se acercan cada vez más a $\frac{\pi}{2}$; es decir, crecen indefinidamente.

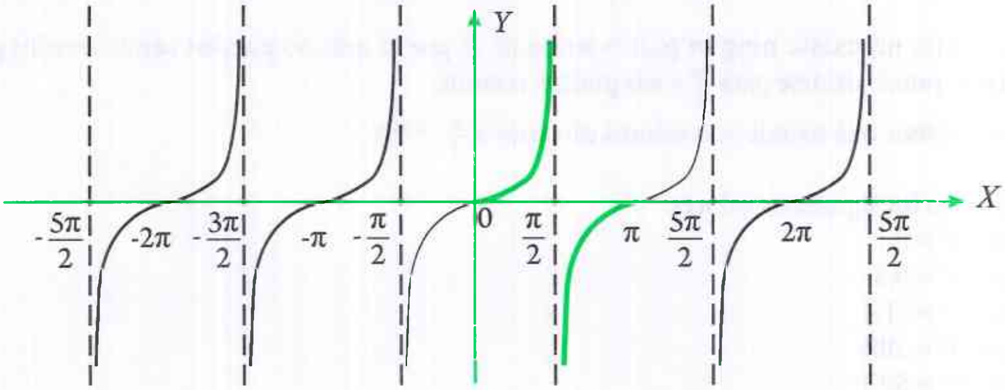
Para valores mayores que $\frac{\pi}{2}$ pero muy cercanos a él (por ejemplo 90.01°), puede comprobarse que se presenta un decrecimiento también sin límite. Este comportamiento también se presenta para $\frac{3\pi}{2}$ y en general en todo punto en donde la tangente no esté definida.

Uniendo los puntos cuyas coordenadas se dan en la tabla, y que ya fueron localizados en el plano, y considerando el comportamiento de la función para valores cercanos $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$, se obtiene la siguiente gráfica para $y = tan\ x$ en el intervalo de 0 a 2π:



Recordemos que una característica de las funciones trigonométricas es que sus gráficas consisten de una misma porción o ciclo que se repite periódicamente. Ya vimos que en el caso del *seno* y del *coseno*, el tramo que se repite es el definido de 0 a 2π, por lo que su periodo es 2π. Para la *tangente* el tramo que se repite va de 0 a π.

Entonces **el periodo de la *tangente* es π.** La siguiente gráfica muestra este hecho.



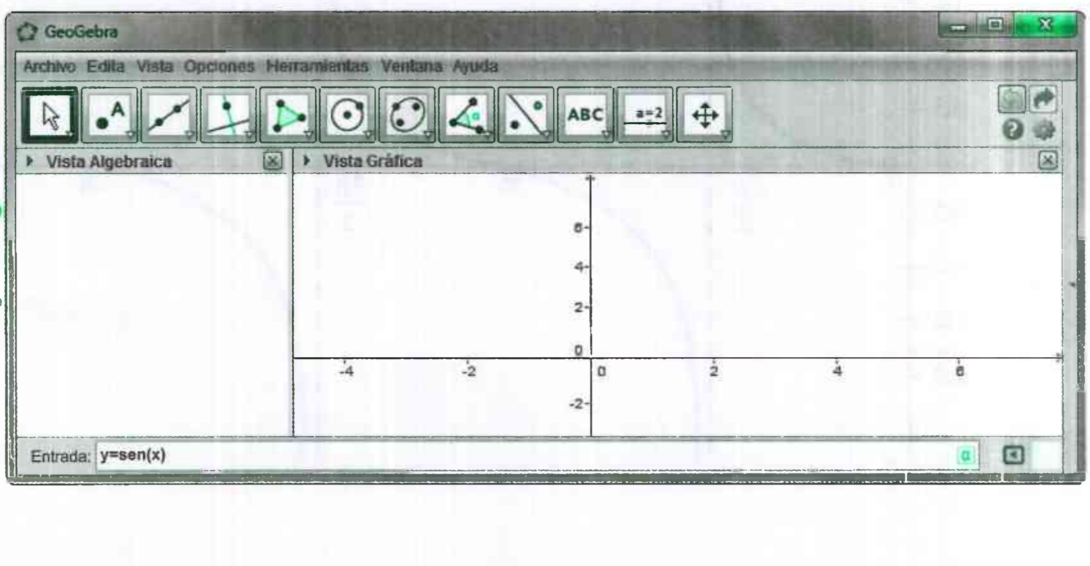
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

5.6 EJERCICIOS

1. Abre Geogebra; observa que en la parte inferior aparece una barra etiquetada como «entrada».
2. Da clic en la barra y escribe: $y = sen(x)$ y enter; automáticamente aparecerá la gráfica de la función $y = sen(x)$. Debes tener en cuenta que los valores que aparecen en el eje horizontal (valores del ángulo representado por x), están en radianes.
3. Ahora, escribe en la barra «entrada» las funciones $y = 2sen(x)$, $y = 3sen(x)$ y $y = 4sen(x)$.

   ¿Qué observas? ¿Qué puede decirse de las gráficas de $y = asen(x)$? Compara estas gráficas con la gráfica de $y = sen(x)$. Escribe tus conclusiones.
4. A continuación, escribe en la barra «entrada» las funciones $y = sen(x) + 1$, $y = sen(x) + 2$, $y = sen(x) + 3$, $y = sen(x) - 1$, $y = sen(x) - 2$ e $y = sen(x) - 3$. ¿Qué observas? ¿Qué puede decirse de las gráficas de $y = sen(x) + a$? Compara estas gráficas con la gráfica de $y = sen(x)$. Escribe tus conclusiones.
5. Repite los pasos 2 a 4, para la función $y = cos(x)$.
6. Repite los pasos 2 a 4, para la función $y = tan(x)$.

Utiliza GeoGebra



5.7 Identidades trigonométricas fundamentales

Estudia con atención y trata de comprender el significado de identidad.

En muchas ocasiones, cierto problema se transforma en uno más sencillo si hacemos una sustitución adecuada de formulaciones trigonométricas equivalentes.

Las identidades trigonométricas son igualdades que se cumplen para todos los valores posibles del argumento (en nuestro caso, para todos los valores posibles que puede tomar el ángulo). Entendemos por valores posibles aquellos para los cuales sí están definidas las razones trigonométricas.

Ejemplo

$sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$ es una identidad trigonométrica válida para todos los valores de x exceptuando algunos valores, por ejemplo x no puede valer 90°, porque $cos\ 90° = 0$, y la división por cero no está permitida.

Algunas identidades fundamentales, se analizan a continuación:

Ubica la lección, ya estudiada, en la que se desarrollaron las identidades recíprocas.

Relación entre el *seno* y la *cosecante*	$\longrightarrow$	$sen\ A \cdot csc\ A = 1$
Relación entre el *coseno* y la *secante*	$\longrightarrow$	$cos\ A \cdot sec\ A = 1$
Relación entre la *tangente* y la *cotangente*	$\longrightarrow$	$tan\ A \cdot cot\ A = 1$

Éstas son unas de las identidades fundamentales denominadas **recíprocas.**

Realiza la siguiente actividad que te permitirá explorar las identidades denominadas Identidades por cociente.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 8

a) Compárese $\frac{sen\ 47°}{cos\ 47°}$ con $tan\ 47°$

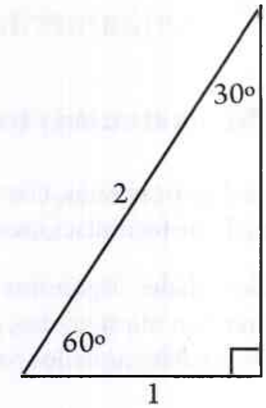
b) Compárese $\frac{sen 71°}{cos\ 71°}$ con tan 71°

c) Compárese $\frac{sen\ 33°}{cos\ 33°}$ con $tan\ 33°$

d) Compárese $\frac{sen\ 66°}{cos\ 66°}$ con $tan\ 66°$

e) ¿Qué puede decirse sobre $\frac{sen\ x}{cos\ x}$ y $tan\ x$? __________

Usando los valores exactos del triángulo 30º -60º -90º, compárese $\dfrac{sen\, 30°}{cos\, 30°}$ con *tan* 30°.



$$\frac{sen\, 30°}{cos\, 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

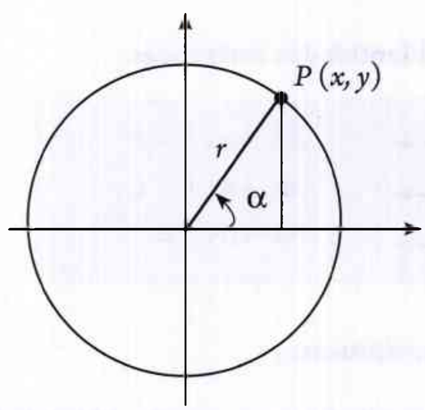
Son iguales

$$tan\, 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{tan\, 30° = \frac{sen\, 30°}{cos\, 30°}}$$

¿Será cierto que para todo ángulo agudo α se cumpla que $tan\, \alpha = \dfrac{sen\, \alpha}{sen\, \alpha}$?

Para contestar esta pregunta, recordemos las definiciones de las funciones trigonométricas:



$$sen\, \alpha = \frac{y}{r} \qquad cot\, \alpha = \frac{x}{y}$$

$$cos\, \alpha = \frac{x}{r} \qquad sec\, \alpha = \frac{r}{x}$$

$$tan\, \alpha = \frac{y}{x} \qquad esc\, \alpha = \frac{r}{y}$$

Dividamos *sen* α entre *cos* α:

$$\frac{sen\, \alpha}{cos\, \alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y\, \cancel{r}}{x\, \cancel{r}} = \frac{y}{x}$$

$$Pero,\ tan\, \alpha = \frac{y}{x}$$

Son iguales. Por lo tanto, se cumple que: $tan\, \alpha = \dfrac{sen\, \alpha}{cos\, \alpha}$

Ahora, dividamos *cos* α entre *sen* α:

$$\frac{cos\, \alpha}{sen\, \alpha} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x\, \cancel{r}}{y\, \cancel{r}} = \frac{x}{y}$$

$$Pero,\ cot\, \alpha = \frac{x}{y}$$

Son iguales. Por lo tanto, se cumple que: $cot\, \alpha = \dfrac{cos\, \alpha}{sen\, \alpha}$

Entonces, las **identidades por cociente** son:

$$\tan \alpha = \frac{sen\, \alpha}{\cos \alpha},\ \cos \alpha \neq 0$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{sen\, \alpha},\ sen\, \alpha \neq 0$$

Estas igualdades fueron halladas con valores generales, por lo que son válidas para cualesquier valor del ángulo, siempre y cuando los denominadores sean diferentes de 0.

Realiza la siguiente actividad que te permitirá explorar las identifdades denominadas Identidades pitagóricas.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 9

Empléese una calculadora para determinar lo siguiente:

a) $(sen\, 57°)^2 + (\cos 57°)^2 =$ ____

c) $(sen\, 9°)^2 + (\cos 9°)^2 =$ ____

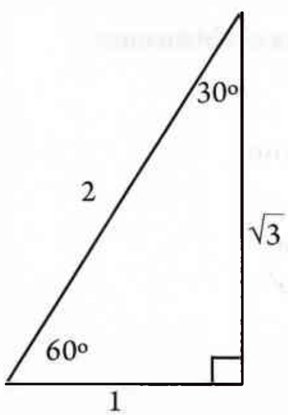
b) $(sen\, 43°)^2 + (\cos 43°)^2 =$ ____

d) $(sen\, 24°)^2 + (\cos 24°)^2 =$ ____

e) ¿Qué puede decirse sobre $(sen\, x)^2 + (\cos x)^2$ para todo valor de x?

f) Los valores que obtuviste, ¿se podrán aproximar a 1? ____________________

Usemos nuevamente los valores exactos del triángulo 30º-60º-90º:



$$(sen\, 60°)^2 + (\cos 60°)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2}{(2)^2} + \frac{(1)^2}{(2)^2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Usando valores exactos, esta suma de cuadrados da 1.

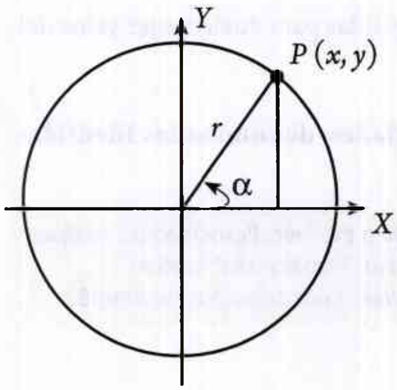
Si siguiéramos haciendo ejemplos como los anteriores, nos daríamos cuenta de que el valor que obtenemos siempre es muy cercano a 1. De hecho el valor exacto es 1.

De ahora en adelante, vamos a convenir, para simplificar las cosas, en que:

Observación: $(sen\, \alpha)^2 = sen^2\, \alpha,\ (\tan \alpha)^2 = \tan^2 \alpha,\ (\sec \alpha)^2 = \sec^2 \alpha$
$(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha,\ (\cot \alpha)^2 = \cot^2 \alpha,\ (\csc \alpha)^2 = \csc^2 \alpha$

Es importante darse cuenta, de que no es lo mismo $sen\ \alpha^2$ que $sen^2\alpha$; en el primer caso estamos elevando el ángulo α al cuadrado y en el segundo estamos elevando al cuadrado al seno del ángulo α.

Ahora vamos a demostrar que: $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ para cualquier ángulo agudo α. Aplicaremos las definiciones de las funciones trigonométricas.



Planteando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$x^2 + r^2 = 1 \qquad (1)$$

Dividiendo la expresión anterior entre r^2 tenemos:

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

Esto equivale a: $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{r^2}$

Pero, $\dfrac{r^2}{r^2} = 1$, entonces $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1$

Y ésto es lo mismo que: $\left(\dfrac{x}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{r}\right)^2 = 1 \qquad (2)$

Pero, sabemos que: $sen\ \alpha = \dfrac{y}{r}$ y $cos\ \alpha = \dfrac{x}{r}$

Sustituyendo estos dos resultados en la expresión (2) obtenemos:

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$$

O bien: $\boxed{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1}$

Si la igualdad pitagórica (1) se divide entre x^2 obtenemos:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

Simplificando: $1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{r}{x}\right)^2$

Pero, $\dfrac{y}{x} = tan\ \alpha$ y $\dfrac{r}{x} = sec\ \alpha$

Entonces, $1 + (tan\ \alpha)^2 = (sec\ \alpha)^2$

O bien: $\boxed{tan^2 + 1 = sec^2\ \alpha} \qquad (3)$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 10

1. Divide la igualdad (1) entre y^2 y sigue un desarrollo parecido al mostrado. Debes obtener la identidad fundamental: $cot^2\,\alpha + 1 = csc^2\,\alpha$

2. **Completa:** las identidades pitagóricas son:

$$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = \_\_\_\_\_\_$$
$$tan^2\,\alpha + 1 = \_\_\_\_\_\_$$
$$cot^2\,\alpha + 1 = \_\_\_\_\_\_$$

3. Escribe verdadero o falso según corresponda. En caso de ser falso, escribir la expresión correcta. Estudia el ejemplo.

Ejemplo

¿Es correcta la expresión $tan\,A = \dfrac{1}{tan\,A}$?

Solución | Es falsa. La expresión correcta es: $tan\,A = \dfrac{1}{cot\,A}$

a. $tan\,\alpha = \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$

b. $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

c. $(tan\,A)^2 - 1 = (sec\,A)^2$

d. $cot^2\,B + 1 = csc^2\,B$

e. $sen\,\beta = \dfrac{cos\,\alpha}{sec\,\beta}$

f. $sen^2\,A + 1 = cos^2\,\alpha$

g. $sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha$

h. $cos\,A = \dfrac{1}{sec\,A}$

i. $tan^2\,A = 1 - cos^2 A$

j. $sen\,A = \sqrt{1 - cos^2\,A}$

Expresar una función en términos de otra.

Lee con atención.

Para el trabajo con identidades, debemos dominar de memoria las ocho identidades básicas que se concentran en la siguiente tabla. Por efecto de clasificación, hemos reenumerado cada una de ellas.

Identidades recíprocas	Identidades de cociente	Identidades que se deducen del teorema de Pitágoras
I. $sen\,\alpha \cdot csc\,\alpha = 1$		VI. $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$
II. $cos\,\alpha \cdot sec\,\alpha = 1$	IV. $tan\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$	VII. $tan^2\,\alpha + 1 = sec^2\,\alpha$
III. $tan\,\alpha \cdot cot\,\alpha = 1$	V. $cot\,\alpha = \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$	VIII. $cot^2\,\alpha + 1 = csc^2\,\alpha$

Estudia los siguientes ejemplos que muestran cómo expresar una función en términos de otra.

Ejemplo 1

Expresar *sen* θ en términos del *cos* θ.

Solución

Debemos identificar una identidad que involucre tanto al seno como al coseno. Esta identidad es la VI:

$$sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1$$

$$sen^2\,\theta = 1 - cos^2\,\theta$$

Despejando *sen* θ: $sen\,\theta = \sqrt{1 - cos^2\,\theta}$

Ejemplo 2

Expresar *cos* θ en términos del *sen* θ.

Solución

De la identidad VI despejamos *cos* θ:

$$sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1$$

$$cos^2\,\theta = 1 - sen^2\,\theta$$

$$cos\,\theta = \sqrt{1 - sen^2\,\theta}$$

Ejemplo 3

Expresar la *tan* α en términos del *cos* α.

Solución

De la identidad IV tenemos que: $tan\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$

Puesto que queremos dejar la tangente en términos del coseno, debemos convertir el numerador también en términos del coseno. Ésto se logra usando la expresión

$$sen\,\theta = \sqrt{1 - cos^2\,\theta}$$

Entonces, $tan\,\alpha = \dfrac{\sqrt{1 - cos^2\,\theta}}{cos\,\alpha}$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 11

Realiza lo indicado.

1. Expresar *cos* α en términos de *sen* α
2. Expresar *tan* α en términos de *sen* α
3. Expresar *sec* α en términos de *cos* α
4. Expresar *sec* α en términos de *sen* α
5. Expresar *csc* α en términos de *sen* α
6. Expresar *cot* α en términos de *sen* α

Demostración de identidades

Estudia con atención y trata de comprender lo que significa demostrar una identidad.

Los métodos para demostración o verificación de identidades consiste en trabajar el lado izquierdo de la identidad hasta que finalmente quede reducido al de la derecha, o al revés, según sea conveniente.

Veamos primeramente un ejemplo algebraico.
Demostrar que: $x(x+2)^2 = x^3 + 4x^2 + 4x$

Desarrollando el lado izquierdo:

$x(x+2)^2 = x(x^2 + 4x + 4)$ Regla del binomio al cuadrado

$= x^3 + 4x^2 - 4x$ Propiedad distributiva

Hemos demostrado que el lado izquierdo es igual al lado derecho.

Estudia y reflexiona el desarrollo de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Demostrar que: $sen\, x(sen^2 x + cos^2 x) = sen\, x$

Solución

Desarrollando el lado izquierdo:

$$sen\, x(sen^2 x + cos^2 x) = sen\, x\,(1) = sen\, x$$

Usando la identidad VI

Queda demostrado.

Ejemplo 2

Demostrar que: $sen^2 x \cdot cos\, x + cos^3 x = cos\, x$

Solución

Desarrollando el lado izquierdo:

$$sen^2 x \cdot cos\, x + cos^3 x = cos\, x(sen^2 x + cos^2 x)$$

Usando la identidad VI

$$= cos\, x\,(1)$$

Queda demostrado.

Ejemplo 3

Demostrar que: $sen\, \alpha \cdot cot\, \alpha = cos\, \alpha$

Solución

Usando la identidad VI

Desarrollando el lado izquierdo: $sen\, \alpha \cdot cot\, \alpha = sen\, \alpha \left(\frac{cos\, \alpha}{sen\, \alpha}\right)$

$$= \left(\frac{\cancel{sen}\, \alpha}{1}\right)\left(\frac{cos\, \alpha}{\cancel{sen}\, \alpha}\right)$$

$$= cos\, \alpha$$

Ejemplo 4

Demostrar que: $(1 + tan^2\,\beta)cos^2\,\beta = 1$

Solución | Desarrollando el lado izquierdo: $(1 + tan^2\,\beta)cos^2\,\beta = \left(1 + \frac{sen^2\,\beta}{cos^2\,\beta}\right)cos^2\,\beta$

$$= \left(\frac{cos^2\,\beta + sen^2\,\beta}{cos^2\,\beta}\right)cos^2\,\beta = \left(\frac{1}{cos^2\,\beta}\right)cos^2\,\beta = 1$$

Ejemplo 5

Demostrar que: $cos^2\,\phi - sen^2\,\phi = 2cos^2\,\phi - 1$

Solución | Desarrollando el lado izquierdo:

$$cos^2\,\phi - sen^2\,\phi = cos^2\,\phi - (1 - cos^2\,\phi)$$
$$= cos^2\,\phi - 1 + cos^2\,\phi)$$
$$= 2cos^2\,\phi - 1$$

Ejemplo 6

Demostrar que: $sen\,\theta + cos\,\theta = \frac{cos\,\theta}{1 - tan\,\theta} + \frac{sen\,\theta}{1 - cot\,\theta}$

Solución | En este caso conviene desarrollar el lado derecho:

$$\frac{cos\,\theta}{1 - tan\,\theta} + \frac{sen\,\theta}{1 - cot\,\theta} = \frac{cos\,\theta}{1 - \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}} + \frac{sen\,\theta}{1 - \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}}$$

$$= \frac{cos\,\theta}{\frac{cos\,\theta - sen\,\theta}{cos\,\theta}} + \frac{sen\,\theta}{\frac{sen\,\theta - cos\,\theta}{sen\,\theta}}$$

$$= \frac{cos^2\,\theta}{cos\,\theta - sen\,\theta} - \frac{sen^2\,\theta}{cos\,\theta - sen\,\theta}$$

$$= \frac{(cos\,\theta + sen\,\theta)\cancel{(cos\,\theta - sen\,\theta)}}{\cancel{(cos\,\theta - sen\,\theta)}}$$

$$= cos\,\theta + sen\,\theta$$
$$= sen\,\theta + cos\,\theta$$

5.7 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.1 y 6

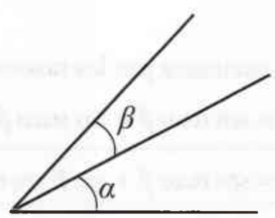
Demostrar cada una de las siguientes identidades:

1. $1 - 2sen^2 x = 2cos^2 x - 1$
2. $tan\,\alpha + cot\,\alpha = sec\,\alpha\, csc\,\alpha$
3. $(1 - cos^2 \phi)(1 - cot^2 \phi) = 1$
4. $\dfrac{sec\,x \bullet csc\,x}{tan\,x + cot\,x} = 1$
5. $tan^2\,\alpha + 1 = sec^2\,\alpha$
6. $(sec\,\beta)^{-2} + (csc\,\beta)^{-2} = 1$
7. $\dfrac{1 - tan^2 x}{1 + tan^2 x} = cos^2 x - sen^2 x$
8. $csc\,\alpha = cot\,\alpha + \dfrac{sen\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}$
9. $\dfrac{sen\,\alpha}{1 + cos\,\alpha} + \dfrac{1 + cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = 2csc\,\alpha$
10. $(tan^2\,\delta - sen^2\,\delta)\,\dfrac{cot^2\,\delta}{sen^2\,\delta} = 1$
11. $(1 - cos\,\alpha)(1 + sec\,\alpha)cot\,\alpha = sen\,\alpha$
12. $tan^2\,\alpha \bullet csc^2 \bullet cot^2\,\alpha \bullet sen^2\,\alpha = 1$
13. $1 - \dfrac{cos^2 x\,\alpha}{1 + sen\,\alpha} = sen\,\alpha$
14. $cot\,x + \dfrac{sen\,x}{1 + cos\,x} = csc\,x$
15. $(1 - sen^2 A)(1 + tan^2 A) = 1$
16. $\dfrac{sen\,x + tan\,x}{cot\,x + csc\,x} = sen\,x \bullet tan\,x$
17. $\dfrac{sen\,\alpha}{csc\,\alpha} + \dfrac{cos\,\alpha}{sec\,\alpha} = 1$

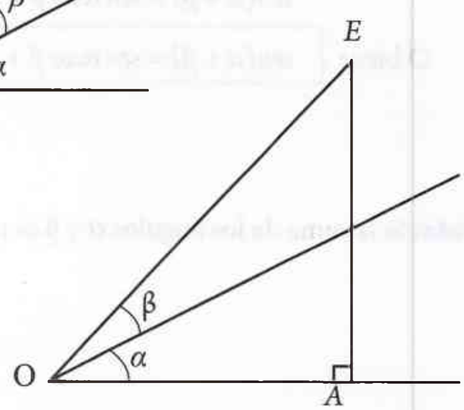
5.8 Identidades trigonométricas de suma de dos ángulos

Estudia con atención la siguiente secuencia que demuestra una equivalencia para $sen\,(\alpha + \beta)$

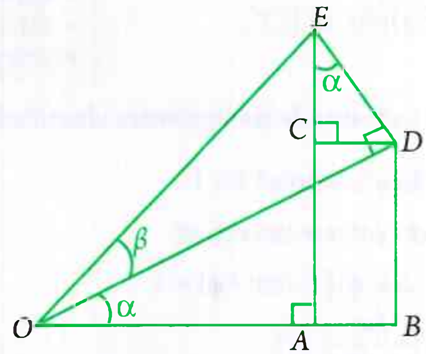
1. Los ángulos α y β son dos ángulos tales que la suma de ellos es menor a 90°.



2. Al trazar de E a A un segmento perpendicular al segmento horizontal, se determina el triángulo rectángulo ΔEAO.



3. Al trazar de E a D, de D a C, y de D a B segmentos perpendiculares $\overline{OD}$, $\overline{EA}$ y $\overline{OB}$ a se obtiene la siguiente figura:



4. En la figura que resulta después de realizar los pasos anteriores, se cumple lo siguiente:

$$sen\,(\alpha+\beta)=\frac{AE}{OE}=\frac{AC+CE}{OE}=\frac{AC}{OE}+\frac{CE}{OE}$$

Como $AC = BD$, entonces:

$$sen\,(\alpha+\beta)=\frac{AE}{OE}=\frac{AC+CE}{OE}=\frac{BD}{OE}+\frac{CE}{OE}$$

Si multiplicamos la razón $\frac{BD}{OE}$ por $\frac{OD}{OD}$ y la razón $\frac{CE}{OE}$ por $\frac{ED}{ED}$ se obtiene:

$$sen\,(\alpha+\beta)=\frac{BD}{OE}\times\frac{OD}{OD}+\frac{CE}{OE}\times\frac{ED}{ED}=\frac{BD}{OD}\times\frac{OD}{OE}+\frac{CE}{ED}\times\frac{ED}{OE}$$

En el triángulo rectángulo OBD:

$$sen\,\alpha=\frac{BD}{OE}$$

En el triángulo rectángulo ECD:

$$sen\,\alpha=\frac{CE}{ED}$$

En el triángulo rectángulo ODE:

$$cos\,\beta)=\frac{OD}{OE}$$

En el triángulo rectángulo ODE:

$$cos\,\beta)=\frac{ED}{OE}$$

Por lo tanto, al sustituir los cocientes por las razones trigonométricas correspondientes se obtiene:

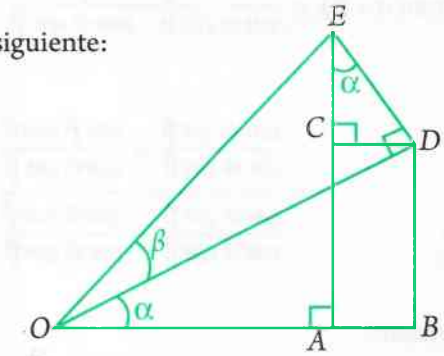
$$sen(\alpha+\beta)=sen\,\alpha cos\,\beta+cos\,\alpha sen\,\beta$$

O bien: $\boxed{sen(\alpha+\beta)=sen\,\alpha cos\,\beta+sen\,\beta\,cos\,\alpha}$

Nota: Si la suma de los ángulos α y β es mayor que 90°, la identidad anterior sigue siendo válida.

Estudia con atención la siguiente secuencia que demuestra una equivalencia para $\boxed{\cos(\alpha+\beta).}$

En la misma figura utilizada para $sen(\alpha+\beta)$, se cumple lo siguiente:



1. $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{OA}{OE}$
2. $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{OA}{OE}=\dfrac{OB-AB}{OE}=\dfrac{OB}{OE}-\dfrac{AB}{OE}$

Puesto que $AB = CD$, entonces:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OB}{OE}-\frac{AB}{OE}=\frac{OB}{OE}-\frac{CD}{OE}$$

Si multiplicamos la razón $\dfrac{OB}{OE}$ por $\dfrac{OD}{OD}$ y la razón $\dfrac{CD}{OE}$ por $\dfrac{ED}{ED}$ se obtiene:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OB}{OE}\times\frac{OD}{OD}-\frac{CD}{OE}\times\frac{ED}{ED}=\frac{BD}{OD}\times\frac{OD}{OE}-\frac{CE}{ED}\times\frac{ED}{OE}$$

En el triángulo rectángulo OBD:

$$\cos\alpha=\frac{OB}{OD}$$

En el triángulo rectángulo ODE:

$$\cos\beta)=\frac{OD}{OE}$$

En el triángulo rectángulo ECD:

$$sen\,\alpha=\frac{CD}{ED}$$

En el triángulo rectángulo ODE:

$$sen\,\beta)=\frac{ED}{OE}$$

Por lo tanto, al sustituir los cocientes por las razones trigonométricas correspondientes se obtiene:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\,\alpha\,\beta\,sen\,\beta}$$

Estudia con atención el siguiente desarrollo que demuestra una equivalencia para $\boxed{\tan(\alpha+\beta):}$

1. Sabemos que:

$$\tan\alpha=\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

$$sen\,(\alpha+\beta)=sen\,\alpha\cos\beta+sen\,\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\,\alpha\,\beta\,sen\,\beta$$

2. Entonces:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{sen\,\alpha\cos\beta + sen\,\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta} = \frac{\dfrac{sen\,\alpha\cos\beta + sen\,\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{sen\,\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{sen\,\beta\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha}\cancel{\cos\beta}} - \dfrac{\cancel{sen\,\alpha}\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha}\cancel{\cos\beta}}} = \frac{\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{sen\,\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \times \dfrac{sen\,\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Por lo tanto:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - sen\,\alpha\,sen\,\beta}$$

Es importante precisar que todas las identidades desarrolladas en esta lección, son válidas para cuales quiera valores de α y β, sean positivos o negativos.

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.1 y 6

5.8 EJERCICIOS

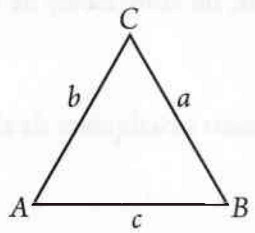
1. En la identidad
   $sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\cos\beta + sen\,\beta\cos\alpha$,
   sustituye β por α para obtener $sen(\alpha+\alpha)$
   y comprueba que:
   $sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha\cos\alpha$
2. En la identidad
   $sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\cos\beta + sen\,\beta\cos\alpha$,
   sustituye β por $-\beta$ para obtener $sen(\alpha-\beta)$
   y comprueba que:
   $sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\cos\beta - sen\,\beta\cos\alpha$,
3. En la identidad
   $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\,\alpha\,\beta\,sen\,\beta$
   sustituye β por α para obtener $\cos(\alpha+\alpha)$
   y comprueba que:
   $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$
4. Comprueba que: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ y
   $\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$
5. En la identidad $\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$ sustituye
   $2\alpha = \beta$ y $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ comprueba que:
   $$sen\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$$
6. En la identidad $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$,
   sustituye $2\alpha = \beta$ y $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ y comprueba que:
   $$\cos\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$$
7. En la identidad
   $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\,\alpha\,\beta\,sen\,\beta$
   sustituye β por $-\beta$ para obtener $\cos(\alpha-\beta)$ y
   comprueba que:
   $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha\,\beta\cos\beta$
8. En la identidad
   $$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
   sustituye β por $-\beta$ para obtener $\tan(\alpha-\beta)$ y
   comprueba que:
   $$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

5.9 Ley de los senos y Ley de los cosenos

Lee con atención:

En lecciones anteriores se usó la trigonometría para resolver triángulos rectángulos. Cuando un triángulo no es rectángulo se dice que es **oblicuángulo.** En esta lección se estudiarán dos propiedades que nos permitirán resolver cualquier tipo de triángulos. Estas propiedades se llaman **Ley de los senos** y **Ley de los cosenos.**

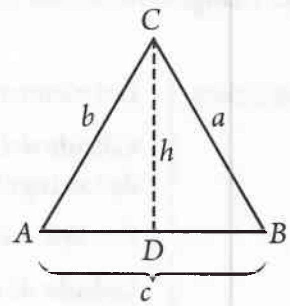
Considera el siguiente triángulo:



Para que aprecies de donde surge la ley de los senos, analiza los pasos indicados.

Paso 1. Al triángulo ΔABC le trazamos el segmento $\overline{CD}$ indicado. Este segmento se llama altura.

Paso 2. En el triángulo ΔABC se cumple que:



$$sen\,A = \frac{h}{b} \text{ de donde: } \longrightarrow h = bsen\,A$$

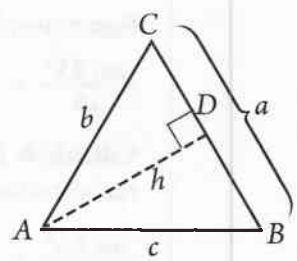
$$sen\,B = \frac{h}{a} \text{ de donde: } \longrightarrow h = asen\,B$$

Paso 3. Aplicando la propiedad transitiva: $asen\,B = bsenA$

Paso 4. Dividendo ambos lados entre ab y simplificando:

$$\frac{asen\,B}{ab} = \frac{bsen\,A}{ab} \longrightarrow \frac{sen\,B}{b} = \frac{sen\,A}{a}$$

Paso 5. Ahora, al triángulo ΔABC le trazamos la altura correspondiente al vértice y repetimos los pasos anteriores:



$$sen\,B = \frac{h}{c} \text{ de donde: } \longrightarrow h = csen\,B$$

$$sen\,C = \frac{h}{b} \text{ de donde: } \longrightarrow h = bsen\,C$$

Entonces: $csen\,B = bsenC$

Dividiendo ambos lados entre bc y simplificando: $\frac{\cancel{c}sen\,B}{b\cancel{c}} = \frac{\cancel{b}sen\,C}{\cancel{b}c} \longrightarrow \frac{sen\,B}{b} = \frac{senC}{c}$

Combinando este resultado con el obtenido en el paso 5 podemos establecer que $\boxed{\frac{sen\,A}{a} = \frac{sen\,B}{b} = \frac{senC}{c}}$

Completa:

Ley de los senos. Dado un triángulo con ángulos A, B, y C y lados de longitudes a, b, y c (a opuesto a A, b opuesto a B, y c opuesto a C), se cumple que:

$$\frac{sen\,A}{a} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

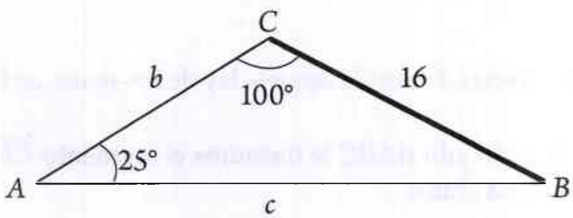
Lee con atención:

Para resolver un triángulo oblicuángulo es indispensable conocer tres de sus elementos. Uno de estos elementos debe ser, forzosamente, un lado. La ley de los senos posibilita resolver triángulos oblicuángulos cuando se conocen:

a) Un lado y dos ángulos

b) Dos lados y el ángulo opuesto a cualquiera de ellos.

Estudia atentamente el siguiente ejemplo.



Ejemplo 1

Obtener el ángulo y los lados restantes del triángulo mostrado en la figura.

Solución

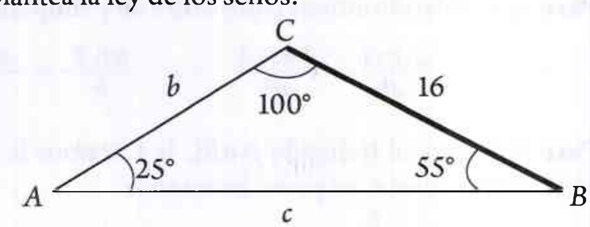
Los elementos a determinar son: los lados b y c, y el ángulo B.

Cálculo del ángulo B. Puesto que conocemos dos ángulos interiores, se aplica la propiedad de los ángulos interiores de los triángulos:

$B = 180° - 100° - 25° = 55°$

Cálculo de los lados desconocidos. Se plantea la ley de los senos:

$$\frac{sen\,A}{a} = \frac{sen\,B}{b} = \frac{sen C}{c}$$



Sustituyendo los elementos conocidos:

$$\frac{sen\,25°}{16} = \frac{sen\,55°}{b} = \frac{sen\,100°}{c}$$

Cálculo b. Para hallar ***b*** empleamos la razón conocida y la razón que contenga a ***b:***

$$\frac{sen\,25°}{16} = \frac{sen\,55°}{b}$$

Recuerda que esta expresión es una proporción, y para despejar cualquier término se usa la regla de los productos cruzados:

$$b sen 25° = 16 sen 55°$$

$$b = \frac{16 sen 55°}{sen 25°} = \frac{16 \times 0.8192}{0.4226} = 31.02$$

Cálculo c. Para hallar ***c*** empleamos la razón conocida y la razón que contenga a ***c***:

$$\frac{sen\ 25°}{16} = \frac{sen\ 100°}{c}$$

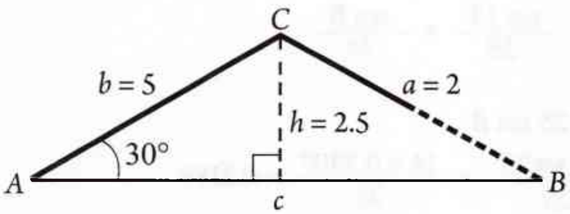
Comprueba que: $$c = \frac{16 sen 100°}{sen 25°} = \frac{16 \times 0.9848}{0.4226} = 37.29$$

Estudia atentamente la siguiente observación relativa a casos ambiguos.

Cuando en un triángulo oblicuángulo se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, pueden presentarse los siguientes casos:

- Si $a < b$ y $a < h$, no hay solución:

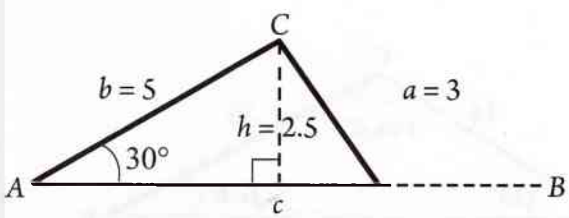
  Ejemplo

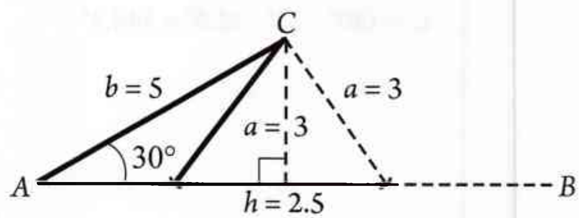


$h = 5 \times sen\ 30° = 2.5$

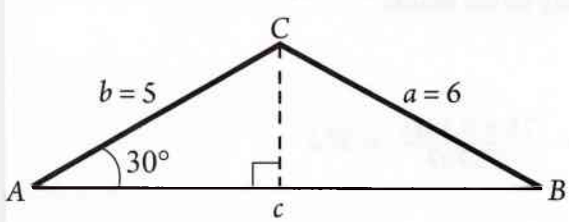
- Si $a < b$ y $a > h$, hay dos soluciones:

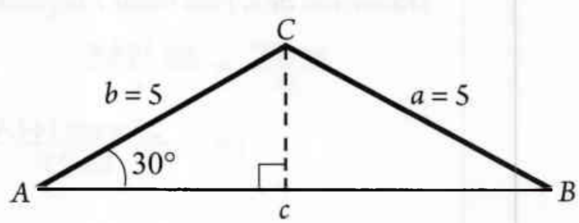
  Ejemplo





- Si $a > b$ o $a = b$, hay una solución:





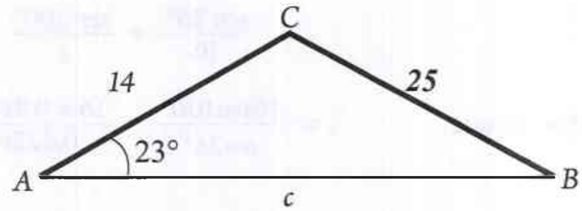
El caso ambiguo de dos soluciones, se justifica analíticamente a partir del siguiente hecho: si $sen\ x = d$ (d es un número positivo menor o igual a 1), existen dos soluciones para ***x***: un ángulo tal que $x_1 = sen^{-1}$ (d), y su suplemento $x_1 = sen^{-1}(d)$.

Para simplificar nuestro estudio, en este curso sólo consideraremos una solución. Es decir, asumiremos un sólo valor para ***x***, tal que $sen\ x = d$.

Estudia atentamente el siguiente ejemplo. Debes recordar que resolver un triángulo consiste en obtener sus elementos desconocidos.

Ejemplo 2

Resolver el triángulo mostrado en la figura:



Solución

Los elementos a determinar son: los ángulos B y C, y el lado c.

Cálculo del ángulo B. Se plantea la ley de los senos: $\dfrac{sen\,A}{a} = \dfrac{sen\,B}{b} = \dfrac{senC}{c}$

Sustituyendo los elementos conocidos: $\dfrac{sen\,23°}{25} = \dfrac{sen\,B}{14} = \dfrac{senC}{c}$

Observa que de esta expresión, sólo podemos conocer **B** mediante la proporción:

$$\frac{sen\,23°}{25} = \frac{sen\,B}{14}$$

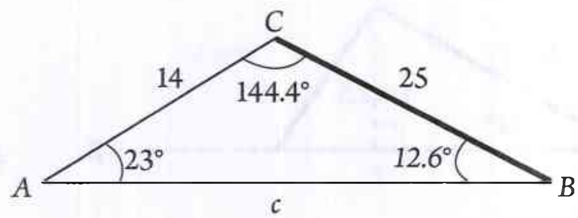
Producto cruzado: $14\,sen\,23° = 25\,sen\,B$

Despejando *sen B*: $sen\,B = \dfrac{14 \times sen23°}{25} = \dfrac{14 \times 0.3907}{25} = 0.2188$

Entonces, ***B** es el ángulo cuyo seno vale* 0.2188. Recuerda que esto se abrevia:
$B = sen^{-1}(0.2188) = 12.6°$

Obtención del ángulo C. Puesto que conocemos dos ángulos interiores, se aplica la propiedad de los ángulos interiores de los triángulos:

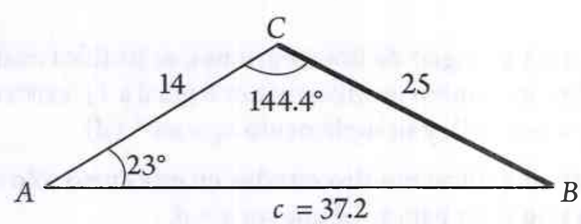
$C = 180° - 23° - 12.6° = 144.4°$



Obtención de c. Para hallar ***c*** se plantea la ley de los senos:

$$\frac{sen23°}{25} = \frac{sen\,144.4°}{c}$$

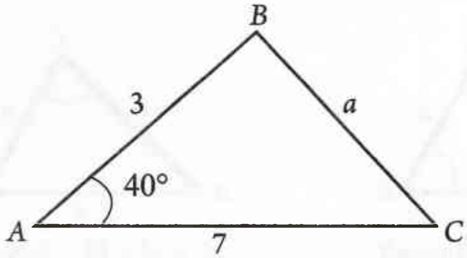
$$c = \frac{25 \times sen\,144.4°}{sen\,23°} = \frac{25 \times 0.5821}{0.3907} = 37.2$$

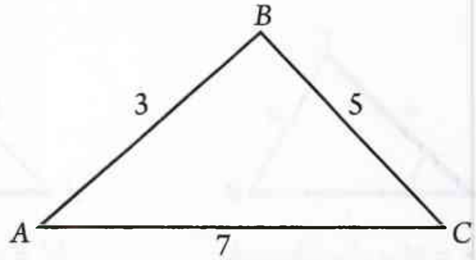


- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 12

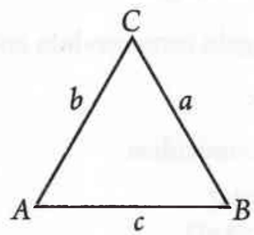
Aplicando la ley de los senos, intenta resolver los siguientes triángulos:

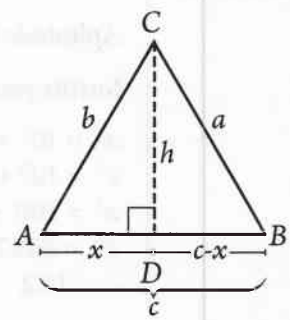




En estos casos en los que se conocen las longitudes de dos lados y la medida del ángulo comprendido, o las longitudes de los tres lados, no es suficiente aplicar la ley de los senos. Debemos aplicar la llamada Ley de los cosenos. Sigue los siguientes pasos para justificar la Ley de los cosenos.

Para justificar la ley de cosenos considera el siguiente triángulo:





Paso 1. Al triángulo ΔABC le trazamos el segmento $\overline{CD}$ indicado. Este segmento se llama altura.

Paso 2. En el triángulo ΔABC se cumple que:

$$\cos A = \frac{x}{b};\ \text{de donde:} \longrightarrow x = b\cos A$$

Paso 3. En el triángulo ΔACD aplicamos el teorema de Pitágoras: $h^2 = b^2 - x^2$ (1)

Paso 4. En el triángulo ΔBCD aplicamos el teorema de Pitágoras: $h^2 = a^2 - (c - x)^2$ (2)

Paso 5. Aplicando la propiedad transitiva en (1) y (2): $b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx \qquad (3)$$

Paso 6. Sustituyendo en (3) el valor de x obtenido en (2):

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cb\cos A$$

Reordenando: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

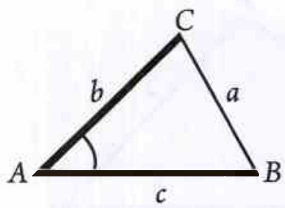
Esta última expresión es la llamada Ley de los cosenos:

Ley de los cosenos. En todo triángulo ΔABC con lados a, b, c, se cumple que:

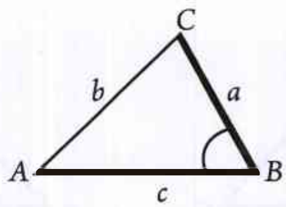
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Esta relación es válida para los tres lados del triángulo, independientemente de cuál lado se escoja como lado a. Para comprender esto, observa que en la expresión $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, A es el ángulo comprendido entre los lados **b y c**.

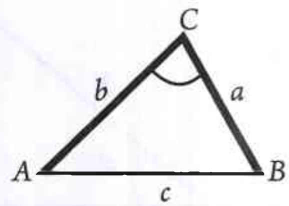
- La variable a la izquierda, es la longitud del lado que no forma parte del ángulo considerado. Entonces, también se puede plantear:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

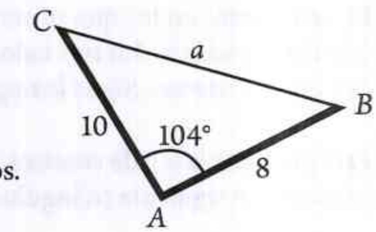


$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Estudia los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

¿Cuánto mide ***a*** en el triángulo mostrado en la figura?



Solución

Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

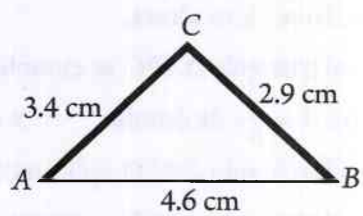
Aplicando la ley de los cosenos:

Sustituyendo los elementos conocidos:

$a^2 = 10^2 + 8^2 - 2(10)(8)\cos 104°$
$a^2 = 10^2 + 8^2 - 2(10)(8)(-.2419)$
$a^2 = 100 + 64 - 160(-.2419)$
$a^2 = 202.7$
$a = 14.2$

Ejemplo 2

¿Cuánto mide el ángulo B en el triángulo mostrado?



Solución

Se conocen tres lados.

Aplicando la ley de los cosenos y tomando en cuenta que nos interesa el ángulo ***B***, planteamos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

Sustituyendo los elementos conocidos:

$(3.4)^2 = (2.9)^2 + (4.6)^2 - 2(2.9)(4.6)\cos B$
$11.56 = 8.41 + 21.6 - 26.68 \cos B$
$11.56 = 30.01 - 26.68 \cos B$
$\dfrac{-18.45}{-26.68} = \cos B$

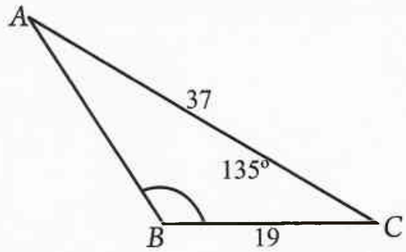
$0.6915 = \cos B$
$B = \cos^{-1}(0.6915) = 46.3°$

5.9 EJERCICIOS

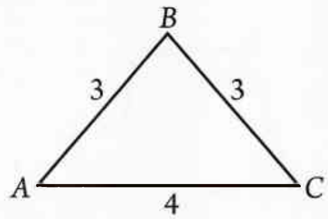
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.1 y 6

1. Resolver cada triángulo.

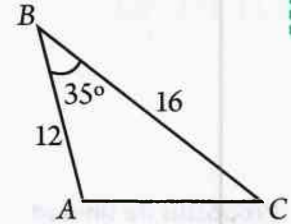
a)



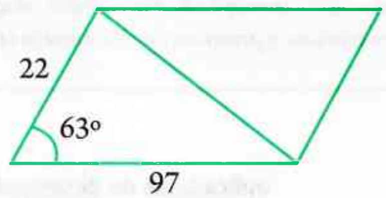
b)



c)



2. ¿Cuánto mide la diagonal del paralelogramo?



INSTRUCCIONES: Elabora un mapa conceptual de la unidad.

EXAMEN 5 (PROBLEMARIO)

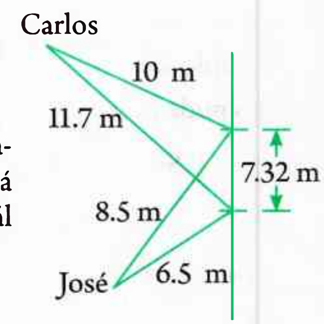
- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 2 y 4.

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

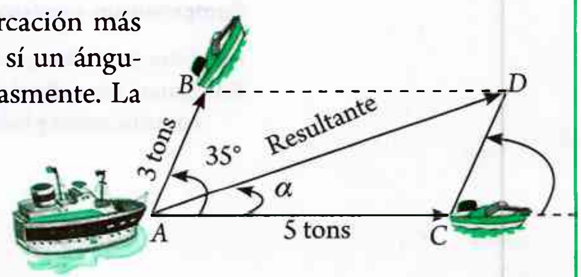
Problema 1. Dos personas de frente y a 2500 m una de otra en el mismo nivel horizontal, observan un avión con ángulos de elevación de 50° 10' y 65° 40'. Hallar la altura del avión.

Problema 2. Después de viajar 207 km en línea recta hacia el este, un caza-bombardero recibe instrucciones para desviarse 12° hacia el sur y viajar 145 km en dicha dirección. ¿Qué tan lejos estará del punto de salida una vez que llegue a su objetivo?

Problema 3. Carlos y José están jugando fútbol soccer. Carlos está parado a 10 m de un poste de la portería y a 11.7 m del otro poste. José está parado a 6.5 m de un poste de la portería y a 8.5 m del otro poste, ¿cuál jugador tiene un ángulo mayor para hacer un tiro hacia la portería ?

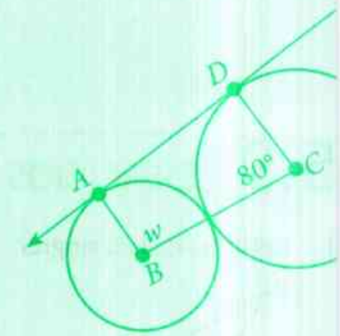


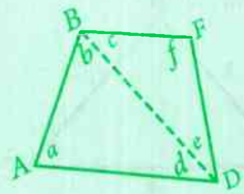
Problema 4. Dos lanchas remolcan una embarcación más grande, jalándola en direcciones que forman entre sí un ángulo de 35°, con fuerzas de 3 y 5 toneladas respectivasmente. La embarción grande experimenta una fuerza en una sola dirección , llamada fuerza resultante, como se muestra en la figura. Calcular la magnitud y la dirección de la resultante.

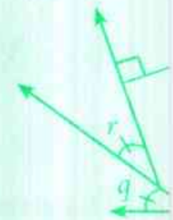


6 Polígonos y Circunferencia

unidad







Propósito de unidad

Analiza las características y propiedades de los polígonos y circunferencia, para desarrollar y presentar argumentos inductivos y deductivos, sobre relaciones geométricas, y, las aplica en diversos contextos teóricos o prácticos de una manera crítica y reflexiva.

Indicadores de desempeño

- Reconoce y define los distintos tipos de cuadriláteros especiales: trapecios, no trapecios y para-lelogramos.
- Reconoce y define los distintos tipos de paralelogramos: rombos, rectángulos y cua-drados.
- Identifica los elementos de una circunferencia: cuerda, diámetro, radio, tangente, se-cante, arco, semicircunferencia, arco menor y arco mayor, ángulo central, ángulo ins-crito, ángulo semiinscrito.
- Utiliza las tecnologías de la información, para explorar las propiedades de los polígo-nos y de la circunferencia.
- Determina medidas de ángulos interiores y exteriores de polígonos.
- Aplica las propiedades de los paralelogramos, rombos, rectángulos, cuadrados y trape-cios para resolver problemas.
- Aplica el cálculo de áreas y perímetros en la solución de problemas.

Competencias disciplinares a evaluar

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, ana-líticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnolo-gías de la información y el conocimiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes de-espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

Competencias genéricas a evaluar

6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

8.3 Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con lo-conocimientos y habilidades que posee.

Utiliza GeoGebra

Actividad preliminar
¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

El siguiente enunciado describe una situación práctica que requiere de algunos conocimientos que estudiarás en esta unidad.

Problema. *Necesitas construir un marco para una ventana ortogonal parecida a la mostrada. Para hacer el marco, cortarás piezas en forma de trapecios idénticos. ¿Cuál son las medidas de los ángulos de los trapecios? Explica cómo encontraste esas medidas.*

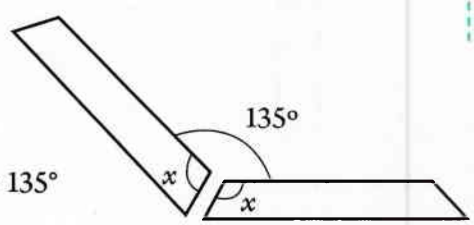
La actividad 1 consiste en que analices la solución planteada a continuación, y, con tus conocimientos previos, debes contestar lo que se te indica. Una vez que termines el estudio de la unidad vuelve a analizar esta actividad.

Actividad 1

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Autoevaluación

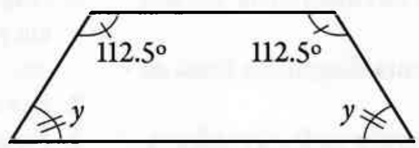
Solución

El polígono definido por la ventana es un **octágono**. Por lo tanto, **la suma de sus ángulos interiores es $180°(8-2) = 1080°$**. Puesto que el octágono es **regular**, todos sus ángulos interiores tiene la misma medida.
Por lo tanto, la medida del ángulo ***m*** es $\frac{1080°}{8} = 135°$



¿Cuánto vale *x*?__________________

Las piezas de la ventana tienen la forma de un **trapecio isósceles**, y puesto que los **ángulos de la base** de estos trapecios son iguales, podemos considerar un trapecio con los ángulos indicados a continuación:



Ahora, aplicamos la propiedad de los cuadriláteros que establece que **la suma de sus ángulos interiores vale 360°**:

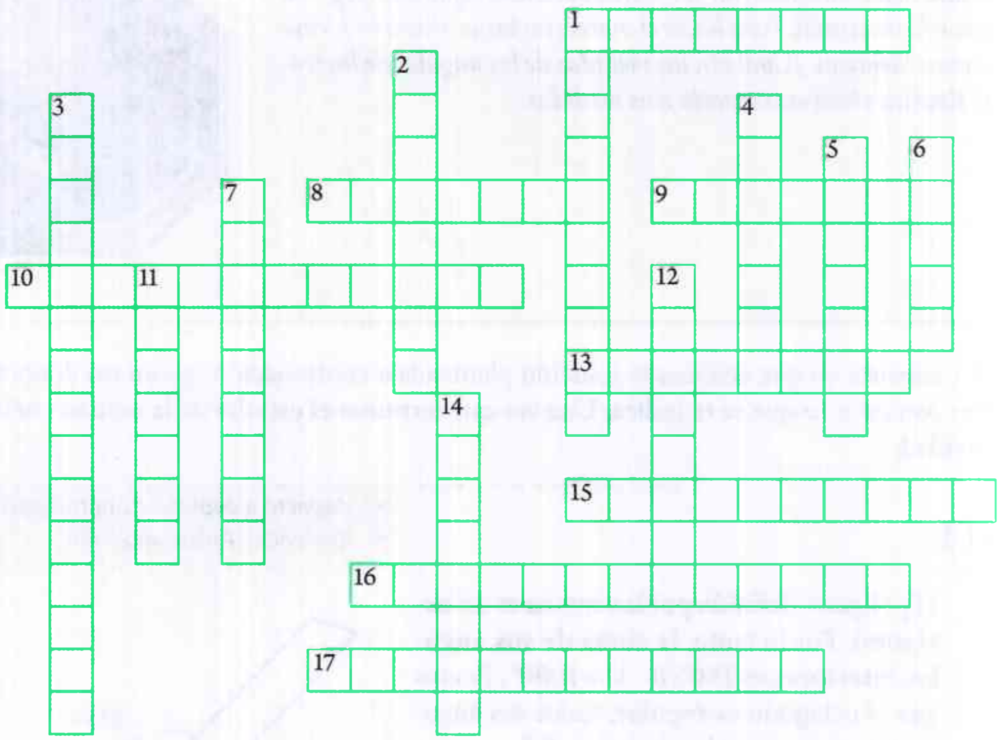
$$2(112.5°) + 2y = 360°$$

Resuelve la ecuación anterior.

Las medidas de los ángulos de los trapecios son: ______________

b) ¿Qué tanto recuerdas de lo que estudiarás en esta unidad?

Utiliza tus conocimientos previos para resolver el siguiente crucigrama, de ser necesario consulta el material de esta unidad y revisa tus respuestas.



Horizontales

1. Recta que toca a la circunferencia en un punto.
8. Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
9. Polígono que no presenta diagonales fuera de él.
10. Ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y uno de sus lados es secante y el otro es tangente.
13. Segmento que conecta dos vértices no consecutivos de un polígono.
15. Paralelogramo con sus cuatro ángulos iguales.
16. Cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.
17. Polígono cuya suma de medidas de sus ángulos interiores vale 360º.

Verticales

1. Completa la oración: un segmento medio de un triángulo es paralelo al...
2. Ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes de la circunferencia.
3. Las diagonales de un rombo son:
4. Polígono que presenta diagonales fuera de él.
5. Polígono que tiene sus lados y ángulos iguales.
6. Paralelogramo con cuatro lados iguales.
7. Polígono cuya suma de medidas de sus ángulos interiores vale 540º.
11. Las diagonales de un rectángulo son:
12. Cuadrilátero que tiene exactamente un par de lados paralelos.
14. Paralelogramo con sus cuatro lados y sus cuatro ángulos iguales.

6.1 Polígonos

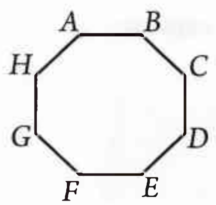
Estudia con atención los siguientes conceptos relativos a polígonos

Los polígonos son figuras formadas por segmentos de recta, de tal manera que: 1) Los segmentos se juntan sólo en sus extremos, 2) como máximo, dos segmentos se encuentran en un punto, y 3) cada segmento toca exactamente a otros dos.

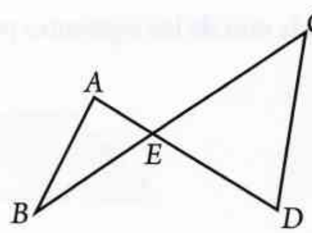
Ejemplo

¿Cuál de las siguientes figuras es un polígono y cuál no?

a)



b)

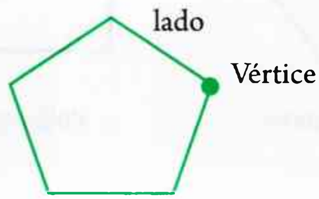


Solución

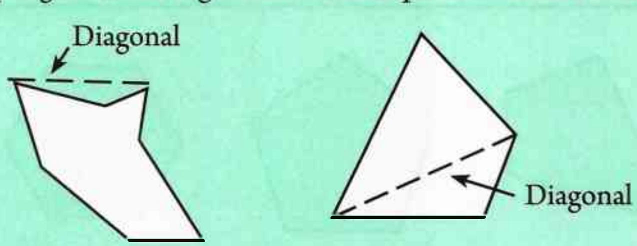
a) Es un polígono porque, cada segmento está unido a otros dos por sus extremos; no hay más de dos segmentos que se encuentren en un punto, y cada segmento toca exactamente a otros dos.

b) No es un polígono. Como figura de cuatro lados, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, no cumple la tercer condición, pues $\overline{BC}$ toca a tres segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$. Como unión de seis segmentos, $\overline{AB}$, $\overline{BE}$, $\overline{EC}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$, tampoco es un polígono porque en el punto E se encuentran más de dos segmentos.

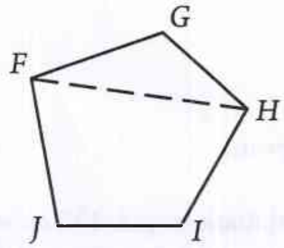
Los segmentos que forman el polígono son sus **lados,** y sus puntos de unión son sus **vértices.**

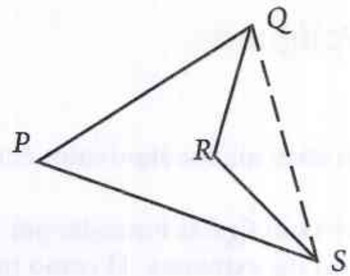


Una diagonal de un polígono es un segmento de recta que conecta dos vértices no consecutivos.



Un polígono es **convexo** si no hay diagonal fuera del polígono. Un polígono es **cóncavo** si hay una diagonal fuera del polígono.

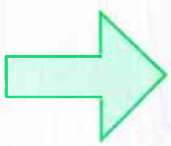


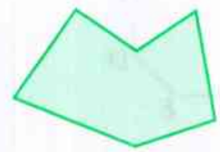
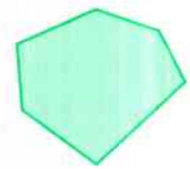


Cada diagonal de este polígono, como $\overline{FH}$, está en el interior del polígono *FGHIJ*. Por lo tanto, es un polígono convexo.

Por lo menos una de las diagonales de este polígono no está en su interior. *PQRS* es un polígono cóncavo.

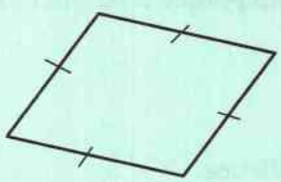
Determina si cada uno de los siguientes polígonos es cóncavo o convexo.



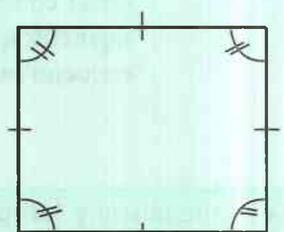



__________ __________ __________ __________

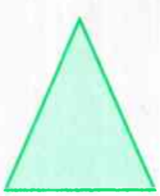
Un **polígono equilátero** es un polígono en el que todos sus lados son iguales. Un **polígono equiángulo** es un polígono en el que todos sus ángulos son iguales. Un **polígono regular** es tanto equilátero como equiángulo, es decir, tiene sus lados y ángulo iguales.

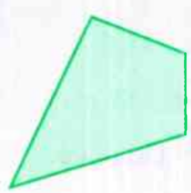

Polígono equilátero

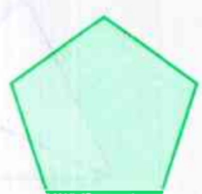

Polígono equiángulo

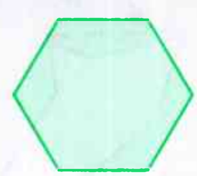

Polígono regular

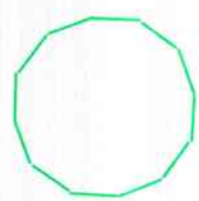
Los polígonos se clasifican por el número de lados de la siguiente manera:


Triángulos
3 lados


Cuadriláteros
4 lados


Pentágonos
5 lados


Hexágonos
6 lados


n - gonos
n lados

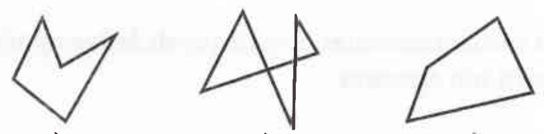
5.1 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4 y 6

. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

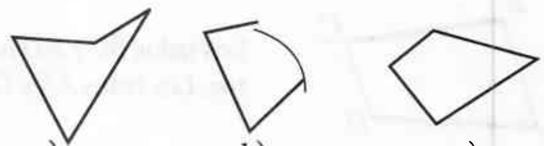
En los ejercicios 2 a 5, selecciónese la figura que no es un polígono. Explíquese por qué no lo es.

.



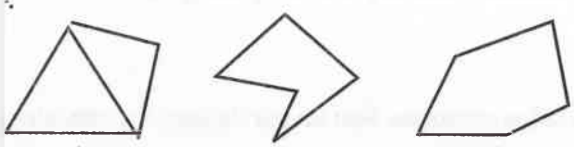
a) b) c)

3.



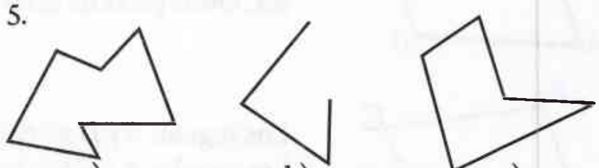
a) b) c)

.



a) b) c)

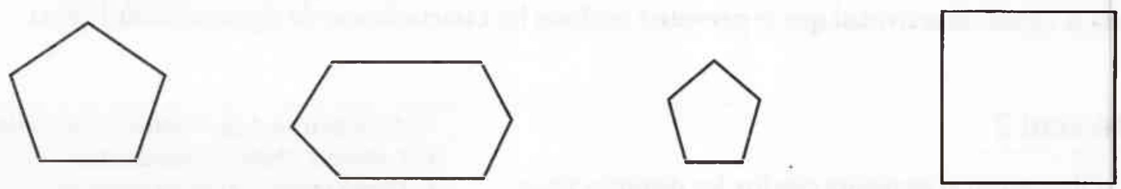
5.



a) b) c)

. ¿Cuáles de las figuras anteriores son polígonos convexos? Por ejemplo, el inciso c, del ejercicio 2, es un polígono convexo.

. ¿Cuáles de los siguientes son polígonos regulares?



a) b) c) d)

. Trácense tantas diagonales como sea posible para cada uno de los polígonos anteriores.

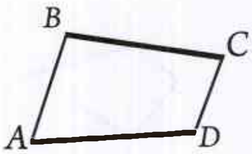
En los ejercicios 9-16, completa la tabla.

Nombre del polígono	Número de lados	Número de diagonales
9. Triángulo		
10.		2
11.	5	
12. Hexágono		
13. Heptágono		
14. Octágono	8	
15.		35
16.	12	

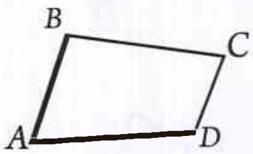
6.2 Cuadriláteros especiales

Recuerda que un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

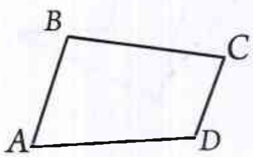
Las figuras siguientes ilustran algunos aspectos importantes de los cuadriláteros. Lee con atención.



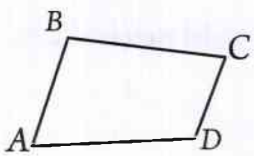
Los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ no tienen vértices comunes. Son un par de **lados opuestos**. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ también son opuestos.



Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ tienen un vértice común. Son un par de **lados adyacentes**. Otros pares de lados adyacentes son $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, y $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$.



Los ángulos B y D no tienen lados comunes. Son un par de ángulos opuestos. Los ángulos A y C también son opuestos.



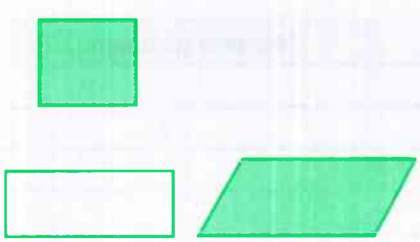
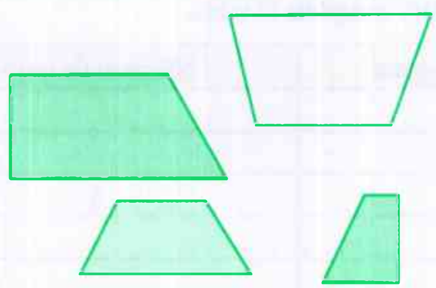
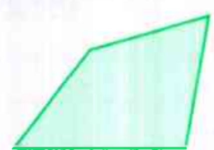
Los ángulos A y B tienen el lado común AB. Son un par de **ángulos consecutivos o sucesivos.** Otros pares de ángulos consecutivos o sucesivos son $\angle B$ y $\angle C$, $\angle C$ y $\angle D$, y $\angle D$ y $\angle A$.

Realiza la siguiente actividad que te permitirá explorar las características de algunos cuadriláteros:

Actividad 2

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

a) Observa en el siguiente cuadro, los distintos tipos de cuadriláteros.

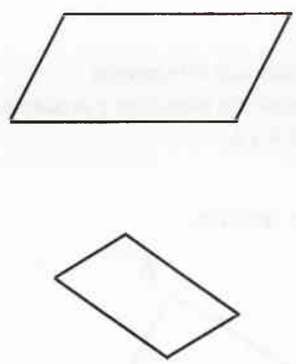
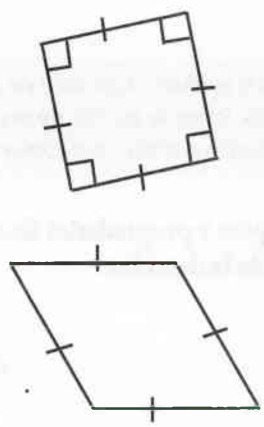
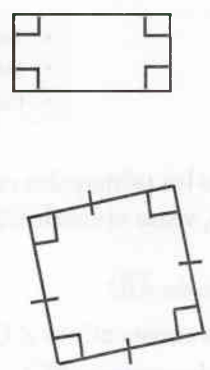
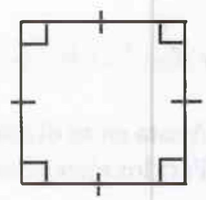
Paralelogramos	Trapecios	Trapezoides
		

b) Contesta las siguientes preguntas ¿Qué tienen en común los paralelogramos? ______________ ________________ ¿Qué características tienen los trapecios?______________________ ________________ ¿Y los trapezoides?______________________________________

Compara las características que observas con las siguientes definiciones:

- Un **paralelogramo** es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.
- Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene exactamente un par de lados paralelos.
- Un **trapezoide** es un cuadrilátero que no tiene algún par de lados opuestos paralelos.

c) A continuación, observa los distintos tipos de paralelogramos: romboides, rombos, rectángulos y cuadrados; trata de establecer características para cada uno de ellos.

Romboides	Rombos	Rectángulos	Cuadrados
			

d) Contesta las siguientes preguntas: ¿Qué tienen en común los romboides? ____________________
____________________ ¿Qué características tienen los rombos? ____________________
____________________ ¿Y los cuadrados? ____________________

Compara las características que observaste con las siguientes defninciones: Existen varias definiciones correctas para cada uno de estos términos. Una vez que defnas un término, puedes usarlo en la definición de otro término.

- Un **romboide** es un paralelogramo sin ningún par de lados adyacentes ni de ángulos consecutivos **iguales.**
- Un **rombo** es un paralelogramo con cuatro lados iguales.
- Un **rectángulo** es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos.
- Un **cuadrado** es un paralelogramo con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.

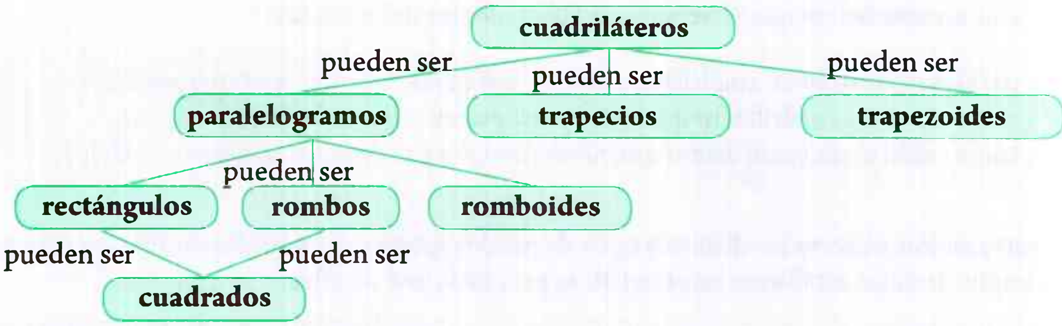
Sin embargo, un cuadrado es un tipo especial de rombo y un tipo especial de rectángulo, así que el cuadrado admite otras definiciones. Por ejemplo:

- Un **cuadrado** es un rombo con cuatro ángulos rectos.
- Un **cuadrado** es un rectángulo con cuatro lados iguales.

Ésta otra definición también es posible:

- Un **cuadrado** es un rombo que también es un rectángulo.

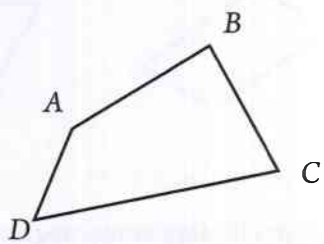
El esquema siguiente presenta un resumen de la clasificación de los cuadriláteros:



6.2 EJERCICIOS

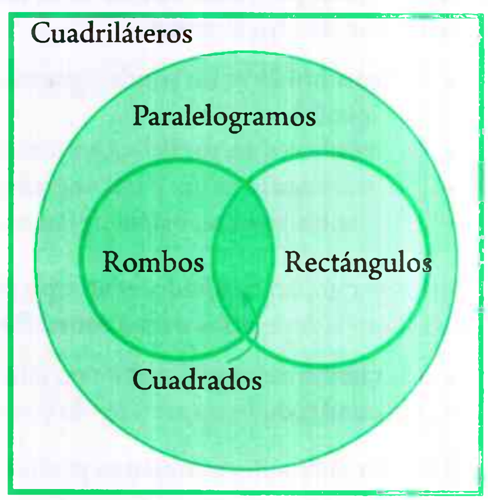
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4 y 6

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.
   Para los ejercicios 2 a 5, véase el cuadrilátero de la derecha.



2. ¿Cuál es el lado opuesto de $\overline{AB}$?
3. ¿Cuáles son los ángulos consecutivos $\angle C$?
4. ¿Cuáles son los lados adyacentes a $\overline{BC}$?
5. ¿Cuál es el ángulo opuesto a $\angle D$?

Determínese si lo siguiente es falso o verdadero. Haz dibujos. Puedes auxiliarte del esquema anterior y en el diagrama de Venn de la derecha.



6. Un cuadrado es un rectángulo.
7. Un rectángulo es un paralelogramo.
8. Un paralelogramo es un rombo.
9. Un trapecio es un paralelogramo.
10. Algunos paralelogramos son rectángulos.
11. Algunos rombos son rectángulos.
12. Un paralelogramo es un trapecio.
13. Todo cuadrado es un rombo.
14. Todo cuadrado es un rectángulo.
15. El rombo, el cuadrado y el rectángulo son paralelogramos.
16. Los cuadriláteros son trapecios o son paralelogramos.
17. El cuadrado es el único cuadrilátero regular.
18. Todos los rombos son cuadrados.

6.3 Propiedades de los polígonos: ángulos interiores y exteriores

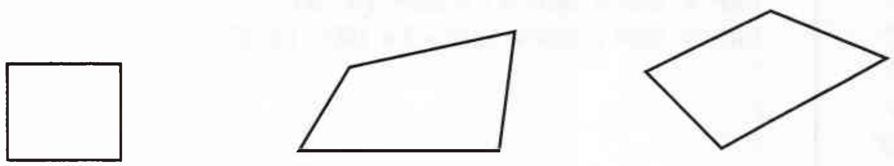
Utiliza GeoGebra

Para explorar las medidas de los ángulos interiores y exteriores de los polígonos, te recomendamos usar el Geogebra en el desarrollo de la siguiente actividad.

Actividad 3

Para esta actividad deberán formar 5 equipos. Cada equipo deberá dibujar tres versiones del mismo polígono. Es decir, si un equipo escoje a los cuadriláteros, deberá dibujar tres cuadriláteros diferentes. Por ejemplo:

Utiliza GeoGebra



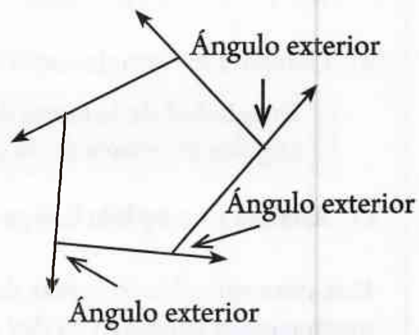
a) Abre Geogebra y usa la opción «polígono», para dibujar tus polígonos.

b) Con la opción «ángulo», mide cada uno de los ***ángulos interiores*** de cada polígono y calcula la suma de sus medidas.

c) En cada polígono forma un sistema de ángulos exteriores. Para crear un conjunto de ángulos exteriores, prolonga cada lado del polígono para formar un ángulo exterior en cada vértice.

d) Mide cada uno de estos ángulos y calcula la suma de sus medidas.

e) Usa tus resultados y los de tus compañeros para llenar el siguiente cuadro:



Número de lados	3	4	5	6	7	8	...	n
Suma de las medidas de los **ángulos interiores**	180°							
Suma de las medidas de los **ángulos exteriores**								

f) **Completa.**

La suma de las medidas de un conjunto de ***ángulos exteriores*** de cualquier polígono es __________

La suma de las medidas de los ***ángulos interiores*** de cualquier polígono es ____________________

Con toda seguridad, te resultó fácil establecer una conclusión para los ángulos exteriores. Sin embargo, para los ángulos interiores, la conclusión no es tan directa. El desarrollo de la siguiente actividad, te ayudará en tal objetivo.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 4

a) **Busca** un patrón en la tabla. Halla una fórmula general para la suma de las medidas de los ángulos de un polígono, en términos del número de lados, n. Completa la columna de equivalencias.

Número de lados	3	4	5	6	7	8	...	n
Suma de las medidas de los **ángulos interiores**	180º	360º	540º	720º	900º	1080º		

+180° +180° +180° +180° +180°

n	Suma	Equivalencia
3	180°	$180^\circ \times 1 = 180^\circ \cdot (3-2)$
4	360°	$180^\circ + 180^\circ = 180^\circ \times 2 = 180^\circ \cdot (4-2)$
5	540°	$180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 180^\circ \times 3 = 180^\circ \cdot (5-2)$
6	720°	?
7	900°	?
8	1080°	?
.		.
.		.
.		.
n		?

b) Compara tu fórmula con la indicada a continuación:

Propiedad de la suma de los ángulos de un polígono: La suma de las medidas de los n ángulos interiores de un polígono de *n-lados* es $180° \times (n-2)$

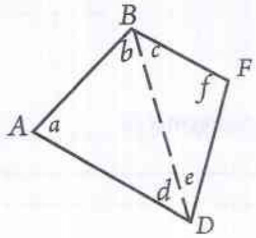
c) **Analiza y completa la siguiente justificación deductiva para el caso de un cuadrilátero.**

Para demostrar los teoremas de esta unidad, usaremos demostraciones en dos columnas. Ëstas demostraciones consisten en dos clumnas: en la columna izquierda se escriben las afirmaciones (proposiciones) y en la derecha las razones de tales afirmaciones.

1. Analiza y completa la siguiente justificación deductiva para el caso de un cuadrilátero:

Hipótesis: □ *ABFD* es un cuadrilátero.

Tesis: $\angle A + \angle B + \angle F + \angle D = (n-2)(180°)$
$= (4-2)(180°)$
$= 360°$



Afirmaciones	Razones
1. $a + b + d = 180°$	1. ______________
2. $c + f + e = 180°$	2. ______________
3. $a + b + d + c + f + e = 360°$	3. Sumando ambos lados de (1) y (2)
4. $a + b + c + f + e + d = 360°$	4. Propiedad ______________
5. $\angle A + \angle B + \angle F + \angle D = 360°$	5. Propiedad aditiva del ángulo.

La propiedad de la suma de los ángulos de un polígono puede utilizarse para hallar el valor de cada ángulo interior de un polígono regular. Basta dividir tal suma entre el número de lados.

Ángulo interior de un polígono regular. Cada ángulo de un polígono regular de n lados mide:

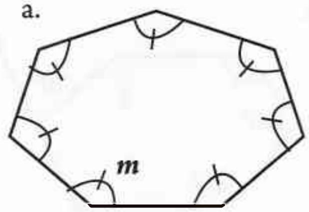
$$\frac{180° \times (n-2)}{n}$$

Estudia los siguientes ejemplos en los que se utilizan estas propiedades de los polígonos.

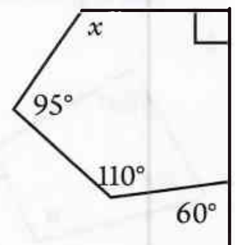
Ejemplo 1

Encuentra la medida de los ángulos indicados con letras.

a.



b.

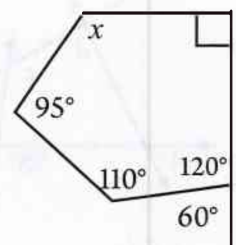


Solución

a) El polígono tiene siete lados.
Por lo tanto la suma de sus ángulos interiores es $180° \times (7-2) = 180° \times 5 = 900°$.
Como todos los ángulos tienen la misma medida, la medida del ángulo m es:
$\frac{900°}{7} = 128.6°$

b) Primeramente, puede observarse que el suplemento del ángulo de 60° es un ángulo interior del polígono. El polígono tiene cinco lados. Por lo tanto la suma de sus ángulos interiores es

$$180° \times (5-2) = 180° \times 3 = 540°.$$



Entonces, $90° + 120° + 110° + 95° + x = 540°$. Resolviendo para x, se obtiene $x = 125°$.

Ejemplo 2

a) Halla la suma de los ángulos interiores de un decágono regular.
b) ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un decágono regular?
c) ¿En cuál polígono la suma de sus ángulos interiores es igual a 3,240°?

Solución

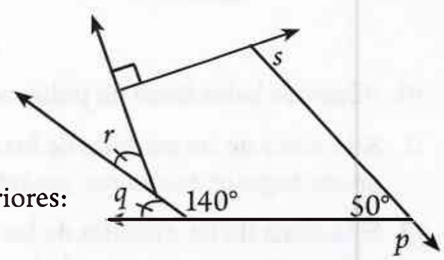
a. $180° \times (n-2) = 180° \times (10-2)$
$= 180° \times 8 = 1{,}440°$.

b. $\frac{180° \times (n-2)}{n} = \frac{1{,}440°}{10} = 144°$

c. $180° \times (n-2) = 3{,}240°$
$180°n - 360° = 3{,}240°$
$180°n = 3{,}240° + 360°$
$n = \frac{3600°}{180°} = 20$

Ejemplo 3

Encuentra las medidas de los ángulos señalados con letras.



Solución

Según la propiedad de los ángulos adyacentes,
$p + 50° = 180°$; por lo tanto, $p = 130°$. También
$q + 140° = 180°$; entonces, $q = 40°$. Así que $r = 40°$.
Usando la propiedad de la suma de los ángulos exteriores:
$130° + 40° + 40° + 90° + s = 360°$.
La solución de esta ecuación da $s = 60°$.

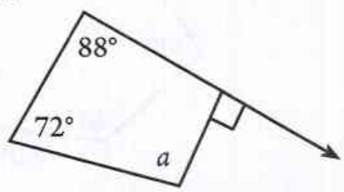
6.3 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4 y 6

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

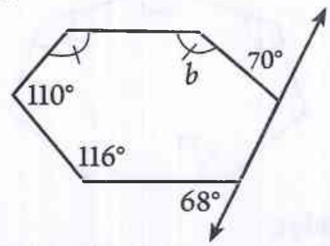
En los ejercicios 2-7, usa la propiedad de la suma de ángulos en polígonos para calcular la medida de cada ángulo marcado con letras.

2.



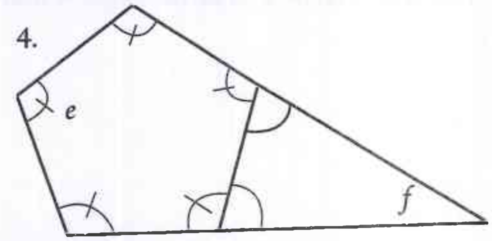
$a = ?$ ______

3.



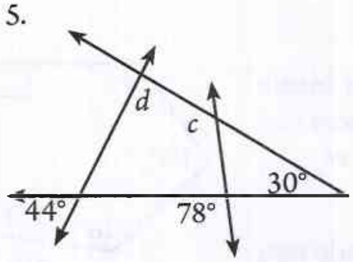
$b = ?$ ______

4.



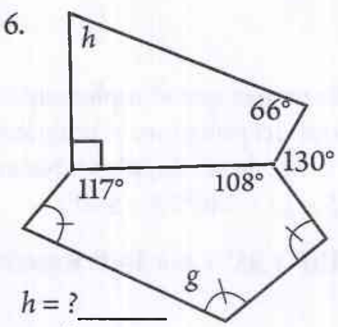
$e = ?$ ______
$f = ?$ ______

5.



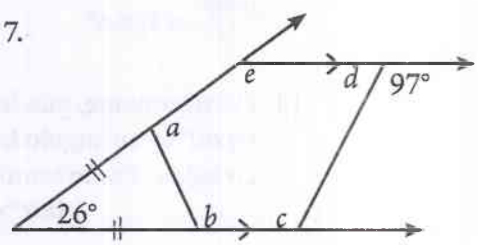
$c = ?$ ______
$d = ?$ ______

6.



$h = ?$ ______
$g = ?$ ______

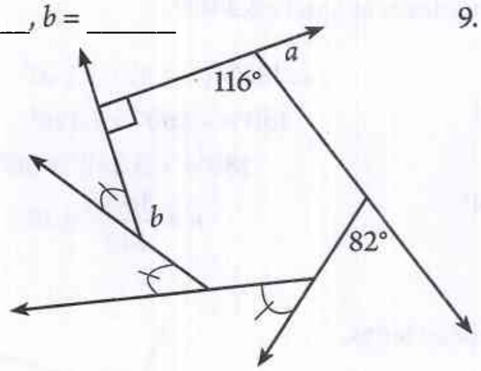
7.



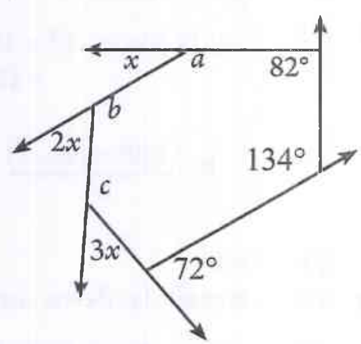
$a = ?$ ______
$b = ?$ ______
$c = ?$ ______
$d = ?$ ______
$e = ?$ ______

En los ejercicios 8-9, encontrar la medida de los ángulos indicados con letras.

8. $a =$ ______, $b =$ ______



9. $a =$ ______, $b =$ ______, $c =$ ______



10. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si cada ángulo exterior mide 30°?
11. Si la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono es igual a la suma de las medidas de sus ángulos exteriores, ¿cuántos lados tiene el polígono?
12. Si la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono es el doble de la suma de sus ángulos exteriores, ¿cuántos lados tiene el polígono?

6.4 Propiedades de los paralelogramos

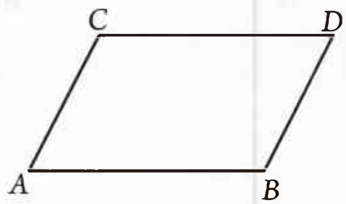
Recuerda que, un *paralelogramo* es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. En la siguiente actividad, explorarás algunas propiedades de los paralelogramos.

Actividad 5

Utiliza GeoGebra

a) Construye un paralelogramo con Geogebra, puedes seguir los siguientes pasos:
1. Traza un segmento $\overline{AB}$.
2. Traza una recta paralela al segmento $\overline{AB}$; etiqueta a dicha recta con la letra ℓ.
3. Ubica sobre la recta ℓ un punto C un poco a la derecha del punto A.
4. Traza el segmento $\overline{AC}$.
5. Traza una recta paralela al segmento $\overline{AC}$ que pase por B; etiqueta a dicha recta con la letra m.
6. Encuentra el punto de intersección entre ℓ y m; etiquétalo con D.
7. Construye los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$; oculta las rectas ℓ y m y los puntos que no sean vértices del cuadrilátero formado.

De esta manera, has construido un paralelogramo que debe ser parecido al mostrado:



b) Ahora, mide los cuatro ángulos. Compara cada par de ángulos opuestos. Comparte los resultados con tus compañeros. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:

> **Propiedad de los ángulos opuestos de un paralelogramo:** Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

c) **Recuerda que,** en un polígono dos ángulos son consecutivos si comparten un lado común. En el paralelogramo anterior, $\angle CAB$ y $\angle ABD$ son un par de ángulos consecutivos. Para descubrir cómo están relacionados los ángulos consecutivos, encuentra la suma de las medidas de cada par de ángulos consecutivos del paralelogramo que dibujaste. Comparte tus observaciones con el grupo. Debes llegar a la siguiente propiedad:

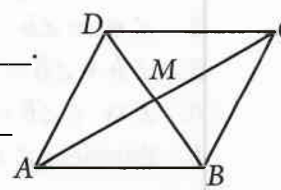
> **Propiedad de los ángulos consecutivos de un paralelogramo:** Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.

d) A continuación, mide y compara las longitudes de los lados opuestos del paralelogramo. Comparte tus resultados con el grupo. Los resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:

> **Propiedad de los lados opuestos de un paralelogramo:** Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.

e) Finalmente, construye las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$, como se muestra en el dibujo.

Marca el punto donde las diagonales se intersectan con la letra M.
Mide $\overline{AM}$ y $\overline{CM}$. ¿Qué puedes concluir acerca del punto M?___________.
Mide $\overline{DM}$ y $\overline{BM}$. ¿También se cumple la conclusión que obtuviste anteriormente. ______________________________



Comparte tus resultados con el grupo. Los resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:

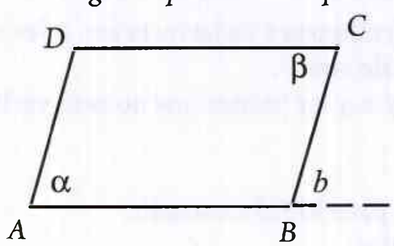
Propiedad de las diagonales de un paralelogramo: Las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

En la siguiente actividad, se presentan justificaciones deductivas para cada una de las propiedades descubiertas inductivamente. Completa las cuestiones que se presentan en blanco.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 6

1. Escribe en forma de flujo tu razonamiento, y a continuación completa la demostración de que *los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.*

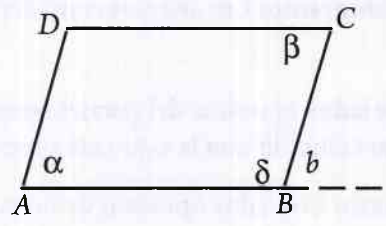


Hipótesis: $\square$ *ABDC* es paralelogramo.
α y β son ángulos opuestos del paralelogramo.

Tesis: $\angle\alpha = \angle\beta$

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$.	1. Por definición de paralelogramo.
2. $\angle\alpha = \angle b$	2. Por ser ______
3. $\angle b = \angle\beta$	3. Por ser ______
4. $\angle\alpha = \angle\beta$	4. Propiedad transitiva.
Queda demostrado	

2. Escribe en forma de flujo tu razonamiento, y a continuación completa la demostración de que *los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.*

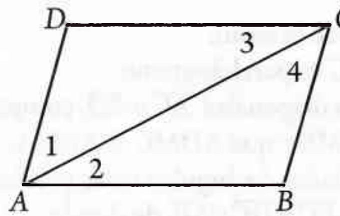


Hipótesis: $\square$ *ABDC* es paralelogramo.
α y δ son ángulos consecutivos del paralelogramo.

Tesis: $\angle\alpha$ y $\angle\delta$ son suplementarios.

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$.	1. Por definición de paralelogramo.
2. $\angle\alpha = \angle b$	2. Por ser ______
3. $\angle b + \angle\delta = 180°$	3. Por ser ángulos adyacentes.
4. $\angle\alpha + \angle\delta = 180°$	4. Propiedad de ______
5. Entonces $\angle\alpha$ y $\angle\delta$ son suplementarios.	5. Definición de ángulos suplementarios.

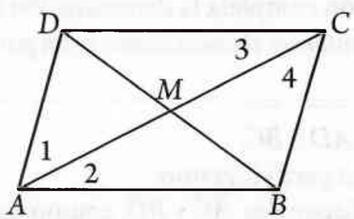
3. Escribe en forma de flujo tu razonamiento, y a continuación completa la demostración de que *los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.*



Hipótesis: ☐ ABDC es paralelogramo.
Tesis: $AD = BC$ y $DC = AB$
Plan: Trazar la diagonal $\overline{AC}$ y comprobar que $\Delta ADC \cong \Delta CBA$

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AD} // \overline{BC}$ y $\overline{DC} // \overline{AB}$.	1. Por definición de paralelogramo.
2. $\angle 1 = \angle 4$	2. Por ser ____________
3. $\angle 2 = \angle 3$	3. Por ser ____________
4. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	4. Propiedad reflexiva.
5. $\Delta ADC \cong \Delta CBA$	5. Por el criterio____________
6. $AD = CB$	6. *PCTCC*
7. $DC = BA$	7. *PCTCC*

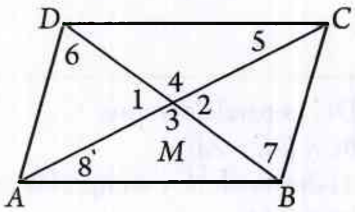
4. Escribe en forma de flujo tu razonamiento, y a continuación completa la demostración de que *las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.*



Hipótesis: ☐ *ABDC* es paralelogramo.
Tesis: $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ se bisecan mutuamente.
Plan: Trazar las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$. Comprobar que $\Delta AMD \cong \Delta CMB$.

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AD} // \overline{BC}$ y $\overline{DC} // \overline{AB}$.	1. Por definición de paralelogramo.
2. $\angle 1 = \angle 4$	2. Por ser ____________
3. $\angle 2 = \angle 3$	3. Por ser ____________
4. $\angle AMD = \angle CMB$	4. Por ser ángulos opuestos por ______
5. $AD = CB$	5. Por ser lados opuestos de un ______
6. $\Delta AMD \cong \Delta CMB$	6. Por el criterio____________
7. $AM = CM$	7. ____________
8. $DM = BM$	8. ____________
9. *M* es punto medio tanto de $\overline{AC}$ como de $\overline{DB}$.	9. Definición de punto medio.

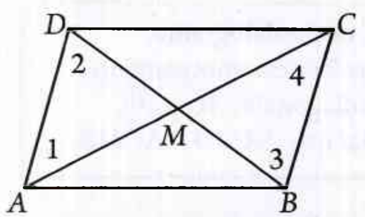
5. Escribe en forma de flujo tu razonamiento, y a continuación completa la demostración de que *si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.*



Hipótesis: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan.
Tesis: ☐ $ABDC$ es paralelogramo.
Plan: Trazar las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, comprobar que $\Delta AMD \cong \Delta CMB$ y que $\Delta DMC \cong \Delta BMA$. Aplicando propiedades de ángulos entre paralelas, deduzca que $\overline{AD} // \overline{BC}$ y $\overline{DC} // \overline{AB}$, de donde ☐ $ABDC$ es paralelogramo.

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan.	1. Por hipótesis.
2. $AM = MC$, $DM = MB$.	2. Definición de bisección y de punto medio.
3. $\angle 1 = \angle 2$.	3. Por ser ____________
4. $\Delta AMD \cong \Delta CMB$	4. Por el criterio______
5. $\angle 6 = \angle 7$	5. PCTCC
6. $\overline{AD} // \overline{BC}$	6. Propiedad de las paralelas.
7. $\angle 3 = \angle 4$	7. Por ser ____________
8. $\Delta DMC \cong \Delta BMA$	8. Por el criterio______
9. $\angle 8 = \angle 5$	9. ____________
10. ☐ $ABDC$ es paralelogramo.	10. Definición de paralelogramo.

6. Escribe en forma de flujo tu razonamiento, y a continuación completa la demostración de que *si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.*

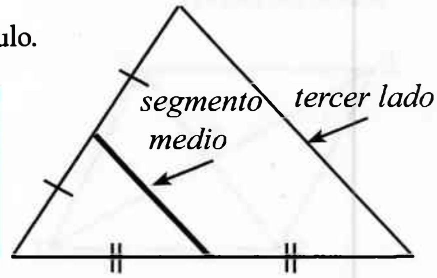


Hipótesis: $AD = BC$, $\overline{AD} // \overline{BC}$.
Tesis: ☐ $ABDC$ es paralelogramo.
Plan: Trazar las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, comprobar que $\Delta AMD \cong \Delta CMB$, de donde $DM = MB$ y $AM = MC$; es decir las diagonales se bisecan y por lo tanto ☐ $ABDC$ es paralelogramo.

Afirmaciones	Razones
1. $AD = BC$, $\overline{AD} // \overline{BC}$.	1. Por hipótesis.
2. $\angle 1 = \angle 4$	2. Por ser ____________
3. $\angle 2 = \angle 3$	3. Por ser ____________
4. $\Delta AMD \cong \Delta CMB$	4. Por el criterio ______
5. $AM = CM$	5. ____________
6. $DM = BM$	6. ____________
7. M es punto medio tanto de $\overline{AC}$ como de $\overline{DB}$.	7. Definición de punto medio.
8. ☐ $ABDC$ es paralelogramo.	8. Porque sus diagonales se bisecan.

Ahora, utilizaremos algunas propiedades de los paralelogramos para estudiar el denominado segmento medio.

Lee con atención la definición de **segmento medio** de un triángulo.

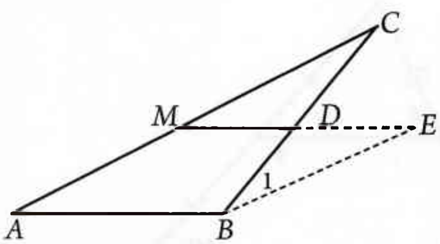


> El segmento medio de un triángulo, es un segmento que conecta los puntos medios de dos lados del triángulo.
> El lado que no interseca al segmento medio se llama tercer lado.

Explora con Geogebra la relación que hay entre el segmento medio y el tercer lado.

Utiliza GeoGebra

Analiza el planteamiento de la demostración de que *el segmento medio de un triángulo, es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.*



Hipótesis: $\overline{MD}$ es segmento medio del ΔABC.

Tesis: $\overline{MD} \parallel \overline{AB}$ y $MD = \dfrac{AB}{2}$

Plan: Prolónguese $\overline{MD}$ hasta un punto E de modo que $MD = DE$, y únase E con B para demostrar que $\Delta CMD = \Delta BED$. Entonces $CM = BE$ y $\angle 1 = \angle C$ por lo que $\overline{AC} \parallel \overline{BE}$.
Pero como $CM = AM$ entonces $BE = MA$. Así, por la propiedad inmediata anterior obtenida en el punto 6, el $\square ABDC$ es un paralelogramo. Entonces $\overline{ME} \parallel \overline{AB}$ y $ME = AB$.
Por tanto $MD \parallel AB$ y $MD = \dfrac{1}{2}AB$.

Actividad 7

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

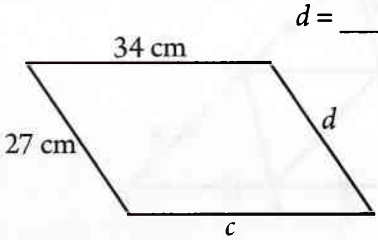
Con ayuda de tu profesor(a), analicen en equipos el plan de demostración del segmento medio y traten de escribir una demostración en dos columnas.

6.4 EJERCICIOS

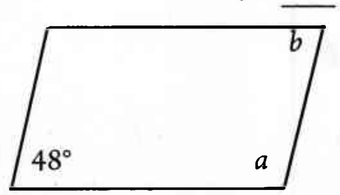
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4 y 6

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.
   En los ejercicios 2-7, cada figura es un paralelogramo. Usa las nuevas propiedades para encontrar los valores indicados.

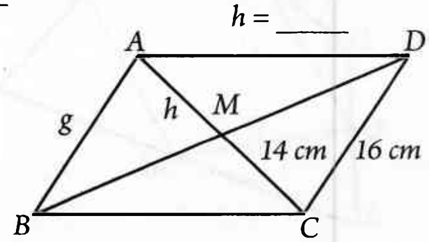
2. $c =$ _____
   $d =$ _____



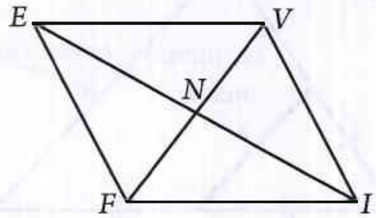
3. $\angle a =$ _____
   $\angle b =$ _____



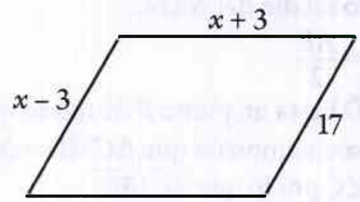
4. $g =$ _____
   $h =$ _____



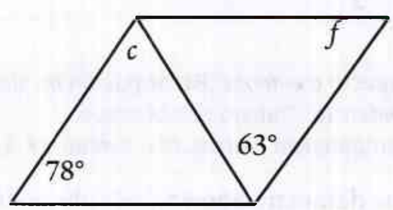
5. Si $VF = 36$ cm, $EF = 24$ cm $EI = 42$ cm. ¿Cuál es el perímetro del ΔNVI?



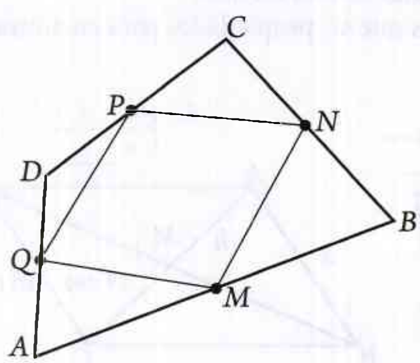
6. ¿Cuál es el perímetro del paralelogramo?



7. $\angle c =$ ______
$\angle f =$ ______

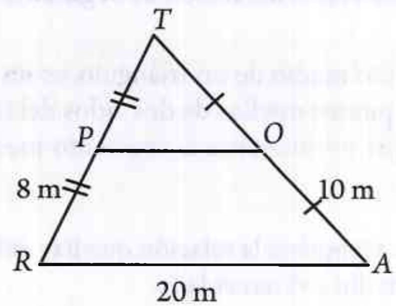


8. Demuestra que en todo cuadrilátero, la figura que se forma al unir los puntos medios de sus lados es un paralelogramo

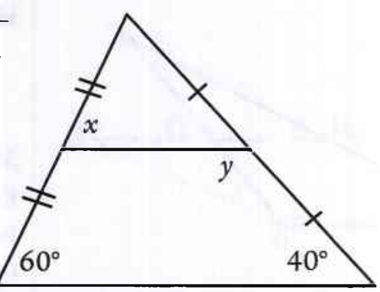


9. ¿Cuántos segmentos medios tiene un triángulo?

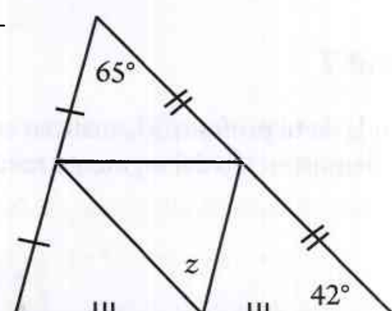
10. ¿Cuál es el perímetro de ΔTOP?



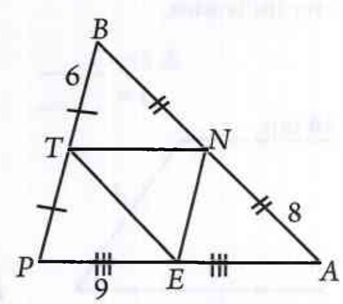
11. $\angle x =$ ______
$\angle y =$ ______



12. $\angle z =$ ______



13. ¿Cuál es el perímetro de ΔTEN?



6.5 Propiedades de los paralelogramos especiales

Lee con atención: *Rombos, rectángulos y cuadrados* todos son paralelogramos. Por lo tanto, todas las propiedades de los paralelogramos que se descubrieron en la lección anterior también se aplican a esas otras formas. Pero, debido a que estos paralelogramos especiales tienen características particulares, también cumplen con propiedades particulares. En esta lección descubrirás estas nuevas propiedades.

Recuerda que un rombo es un paralelogramo con cuatro lados congruentes o iguales. En otras palabras un rombo es un *paralelogramo equilátero*. En la siguiente actividad, explorarás algunas propiedades de los rombos.

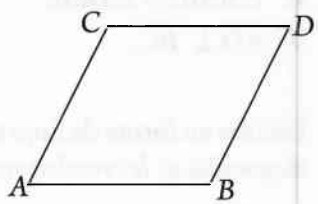
Actividad 8

a) Construye un rombo con Geogebra, puedes seguir los siguientes pasos:

1. Traza un segmento $\overline{AB}$.
2. Traza por A una recta; etiquétala con m.
3. Traza una paralela a la recta m que pase por B. Etiquétala con n.
4. Usa la opción compás, da clic en A, clic en B y otra vez clic en A.
5. Encuentra el punto de intersección entre el círculo que aparece y la recta m; etiquétalo con C.
6. Traza una paralela a $\overline{AB}$, que pase por C.
7. Encuentra el punto de intersección entre esta última paralela y la recta n; llámalo D.
8. Traza los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{BD}$. Oculta círculos y rectas que sólo fueron auxiliares.

Utiliza GeoGebra

De esta manera, has construido un rombo que debe ser parecido al mostrado:



b) Ahora, explorarás algunas propiedades de los rombos:

1. Puesto que los rombos son paralelogramos y las diagonales de un paralelogramo se bisecan una a otra, las diagonales de los rombos también se bisecan una a otra. Comprueba esta propiedad en el rombo construido.

2. Mide los ángulos formados por las dos diagonales. ¿Qué concluyes? Comparte tus resultados con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:

> Propiedad de las diagonales de un rombo: las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí; además, se bisecan entre sí.

3. Ahora, mide los ángulos formados por las diagonales y los lados del rombo. ¿Qué concluyes? Comparte tus resultados con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:

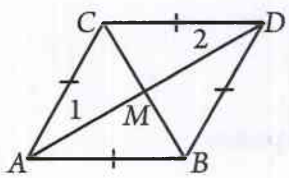
Propiedad de los ángulos de un rombo: las diagonales de los rombos son bisectrices de los ángulos del rombo.

En la siguiente actividad, se presentan justificaciones deductivas para cada una de las propiedades descubiertas inductivamente. Completa las cuestiones que se presentan en blanco.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 9

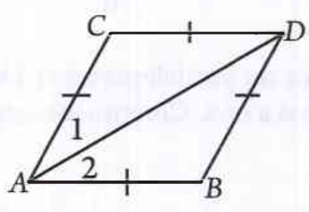
1. Escribe en forma de flujo tu razonamiento, y a continuación completa la demostración de que *las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.*



Hipótesis: $\square\, ABDC$ es un rombo.
Tesis: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.
Plan: Trazar las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ y comprobar que $\Delta AMC \cong \Delta DMC$.

Afirmaciones	Razones
1. $\square\, ABDC$ es un rombo.	1. Por hipótesis.
2. $AC = CD$	2. Definición de rombo.
3. $\angle 1 = \angle 2$.	3. Por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.
4. $\overline{AM} = \overline{MD}$	4. Por la propiedad de las diagonales de un paralelogramo.
5. $\Delta AMC \cong \Delta DMC$	5. Por ________
6. $\angle AMC = \angle DMC$	6. ________
7. $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.	7. Por definición de rectas perpendiculares.

2. Escribe en forma de flujo tu razonamiento, y a continuación completa la demostración de que *las diagonales de los rombos son bisectrices de los ángulos del rombo.*



Hipótesis: $\square\, ABDC$ es un rombo.
Tesis: $\overline{AD}$ es bisectriz de $\angle CAB$.
Plan: Trazar la diagonal $\overline{AD}$ y comprobar que $\Delta ACD \cong \Delta ABD$.

Afirmaciones	Razones
1. $\square\, ABDC$ es un rombo.	1. Por ________
2. $AC = CD$ y $AB = BD$	2. Por ________
3. $AD = AD$	3. Propiedad reflexiva.
4. $\Delta ACD \cong \Delta ABD$.	4. Por ________
5. $\angle 1 = \angle 2$	5. Por ________
6. $\overline{AD}$ es bisectriz de $\angle CAB$.	6. Por definición de bisectriz.

Recuerda que un rectángulo es un paralelogramo con cuatro ángulos congruentes o iguales. En otras palabras un rectángulo es un *paralelogramo equiángulo.*

Puesto que un rectángulo es un paralelogramo, sus diagonales se bisecan. Pero además, un rectángulo tiene una propiedad adicional:

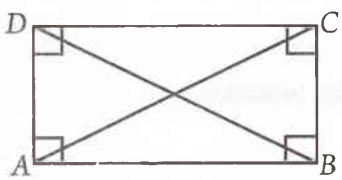
Propiedad de las diagonales de un rectángulo: las diagonales de un rectángulo son iguales.

En la siguiente actividad, se presentan justificaciones deductivas para esta propiedad.
Completa las cuestiones que se presentan en blanco.

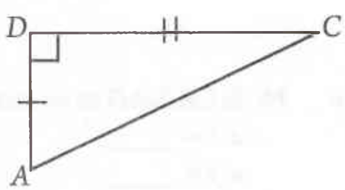
Actividad 10

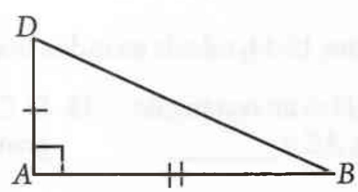
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

1. Escribe en forma de flujo tu razonamiento, y a continuación completa la demostración de que *las diagonales de un rectángulo son iguales.*



Hipótesis: □ $ABDC$ es un rectángulo.
Tesis: $AC = DB$.
Plan: Trazar las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ y comprobar que $\Delta ADC \cong \Delta DAB$.





Afirmaciones	Razones
1. □ $ABDC$ es un rectángulo.	1. Por ______________________
2. $\angle ADC = \angle BAD$	2. Por definición de rectángulo.
3. $DC = AB$	3. Por ser lados opuestos de un paralelogramo.
4. $AD = AD$.	4. Por ______________________
5. $\Delta ADC \cong \Delta DAB$	5. Por ______________________
6. $AC = DB$.	6. Por ______________________

6.5 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4 y 6

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

En los ejercicios 2-11, indica si cada oración es siempre verdadera, algunas veces, o nunca verdadera. Usa dibujos o explicaciones de apoyo.

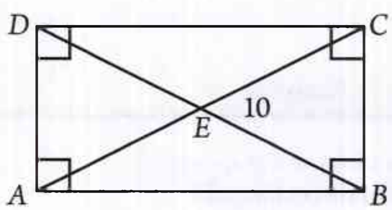
2. Las diagonales de un paralelogramo son iguales.
3. Los ángulos consecutivos de un rectángulo son iguales y suplementarios.
4. Las diagonales de un rectángulo se bisecan una a otra.
5. Las diagonales de un rectángulo bisectan los ángulos.
6. Las diagonales de un cuadrado son bisectores perpendiculares una a otra.
7. Un rombo es un cuadrado.
8. Un cuadrado es un rectángulo.
9. Una diagonal divide a un cuadrado en dos triángulos rectángulos isósceles.
10. Ángulos opuestos en un paralelogramo son congruentes.
11. Ángulos consecutivos de un paralelogramo son congruentes.

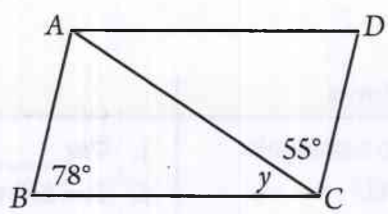
En los ejercicios 12-14, calcula en cada caso, los valores pedidos.

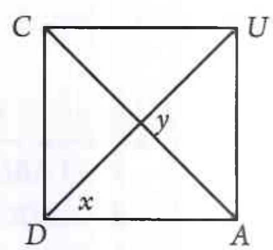
12. Si $\square ABCD$ es un rectángulo y $EB = 10$, $AC =$ _______

13. Si $\square BCDA$ es un paralelogramo, $\angle y =$ _____

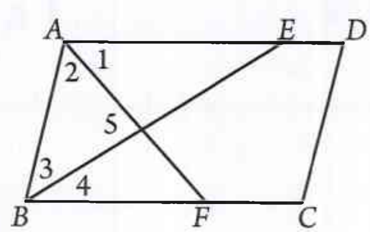
14. Si $\square CUAD$ es un cuadrado, $\angle x =$ _____ $\angle y =$ _____



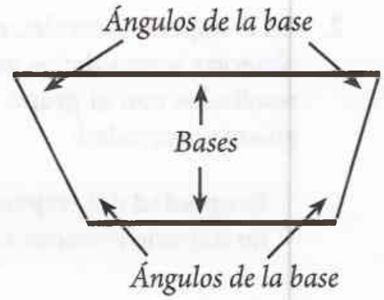




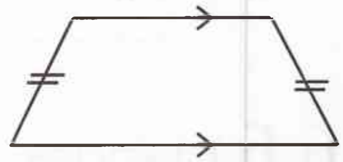
15. Si $\square ABCD$ es un paralelogramo, $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$ son bisectrices del $\angle BAD$ y $\angle ABC$ respectivamente y $\angle C = 120°$, ¿cuánto mide el $\angle 5$?



6.6 Propiedades de trapecios



Recuerda que un **trapecio** es un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos. Los lados paralelos se llaman **bases.** Un par de ángulos que comparten una base como lado común se llaman **ángulos de la base.**



Lee con atención la definición de **trapecio isósceles:**

> Un **trapecio isósceles** es un trapecio cuyos lados no paralelos son de la misma longitud.

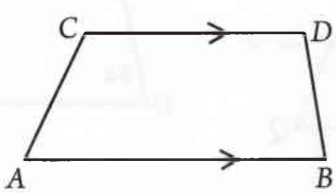
En la siguiente actividad, explorarás algunas propiedades de los trapecios.

Actividad 11

Utiliza GeoGebra

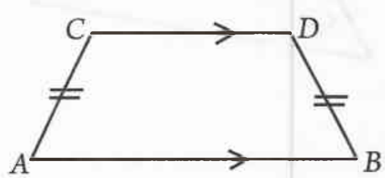
a) Construye dos trapecios con geogebra: uno no isósceles y otro isósceles. Puedes seguir los siguientes pasos:

1. Traza un segmento $\overline{AB}$.
2. Localiza un punto C arriba de $\overline{AB}$ y un poco adelante de A.
3. Traza el segmento $\overline{AC}$.
4. Traza una recta m paralela a $\overline{AB}$ que pase por C.
5. Localiza sobre la recta m un punto D cualquiera.
6. Traza los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$. Oculta la recta m. Así, has formado el trapecio $ABCD$.



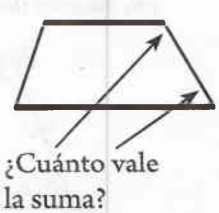
Utiliza GeoGebra

1. Traza un segmento $\overline{AB}$.
2. Localiza un punto C arriba de $\overline{AB}$ y un poco adelante de A.
3. Traza el segmento $\overline{AC}$.
4. Traza una recta m paralela a AB que pase por C.
5. Usa la opción compás; haz clic en A, clic en C y clic en B.
6. Encuentra el punto de intersección entre la recta m y el círculo que aparece; llámalo D.
7. Traza los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$. Oculta el círculo y la recta m. Así, has formado un trapecio isósceles.



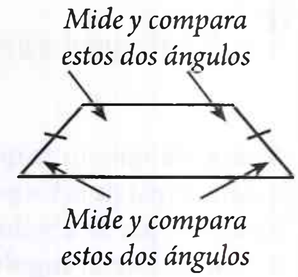
b) Ahora, explorarás algunas propiedades de los trapecios:

1. En cada trapecio, mide cada par de ángulos consecutivos y suma sus medidas. ¿Qué concluyes? Comparte tus resultados con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:



> **Propiedad de los ángulos consecutivos de un trapecio:** los ángulos consecutivos que están entre las bases de un trapecio son suplementarios.

2. En el trapecio isósceles, mide cada par de ángulos de cada base. ¿Qué observas acerca de los pares de ángulos en cada base? Comparte tus resultados con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:



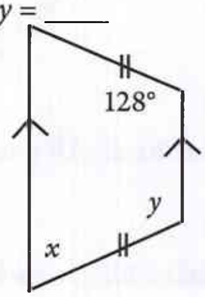
Propiedad del trapecio isósceles: los ángulos de la base de un trapecio isósceles son iguales.

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4 y 6

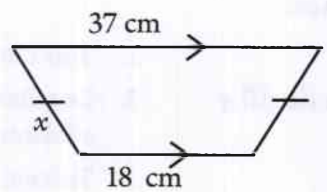
6.6 EJERCICIOS

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.
Usa las propiedades de los trapecios para calcular las medidas pedidas.

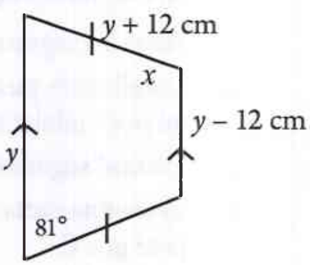
2. $\angle x =$ _____
$\angle y =$ _____



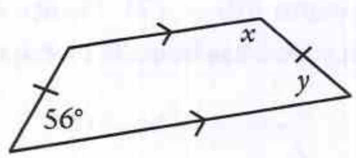
3. Si *perímetro* = 85 cm,
$x =$ _____



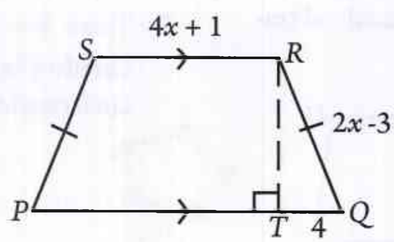
4. Si *perímetro* = 164 cm,
$\angle x =$ _____
$y =$ _____



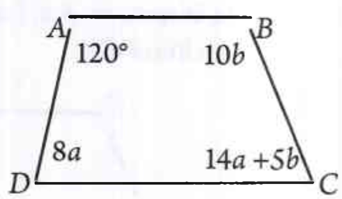
5. $\angle x =$ _____
$\angle y =$ _____



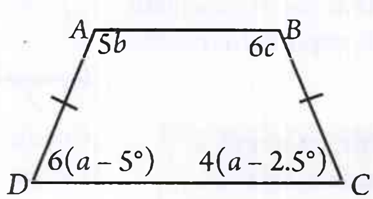
6. Si *perímetro* de $PQRS$ = 220 cm, $PS =$ _____



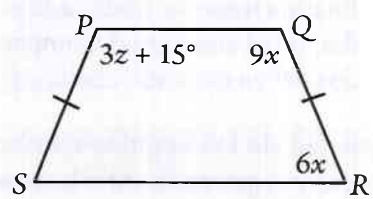
7. Si $ABCD$ es un trapecio, halla los valores de a y b.



8. Si $ABCD$ es un trapecio, isósceles, determina los valores de a, b y c.



9. Si $PQRS$ es un trapecio, isósceles, halla los valores de x y z



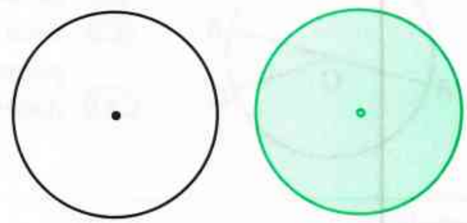
6.7 Circunferencia y círculo. Ángulos asociados a una circunferencia

Lee con atención la siguiente información relativa a la circunferencia y al círculo.

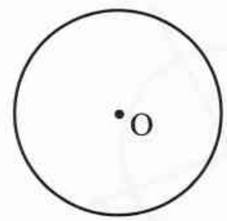
Es común que se utilicen circunferencia y círculo como sinónimos, sin embargo, aun cuando estos conceptos están estrechamente vinculados, tienen significados que es preciso distinguir para poder aplicarlos correctamente.

La ***circunferencia*** es una curva cerrada cuyos puntos están en un mismo plano y a igual distancia de otro punto interior fijo que se llama centro de la circunferencia. El ***círculo*** es la superficie del plano limitado por una circunferencia. La circunferencia es una línea y el círculo una región.

Para referirse a una circunferencia o a un círculo, se usa el signo ⊙O, que se lee circunferencia (o círculo) con centro O. Para distinguir si se trata de un circunferencia o un círculo con centro O, debemos atender el contexto de uso.



Circunferencia Círculo



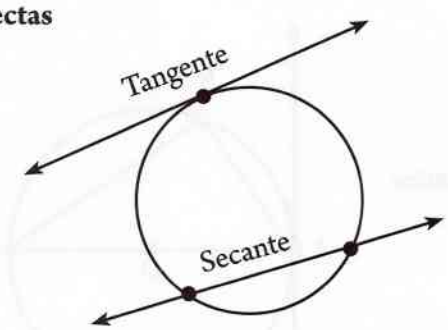
⊙O significa circunferencia con centro O.

Los siguientes segmentos, rectas, arcos y ángulos se asocian a una circunferencia.

Segmentos

Cuerda es un segmento que une dos puntos de la circunferencia.
Diámetro es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
Radio es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.

Rectas

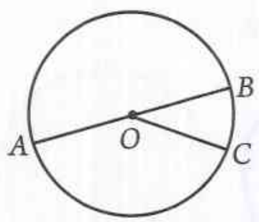


Tangente es la recta que toca a la circunferencia en un punto. Este punto se llama punto de tangencia.
Secante es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

Arco es una parte de la circunferencia. Un arco se representa con el símbolo ⌢ que se lee «*arco*».
Semicircunferencia es un arco de longitud igual a la mitad de la circunferencia.
Arco menor es aquel que mide menos que una semicircunferencia.
Arco mayor es aquel que mide más que una semicircunferencia.

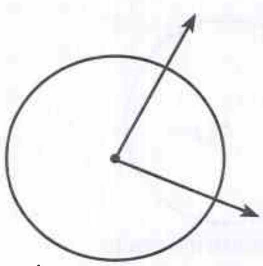
Los arcos mayores y la semicircunferncia se denotan con tres puntos que son: sus dos extremos y un punto entre ellos. Para denotar arcos menores, es suficiente usar las dos letras de sus puntos extremos.

Arcos

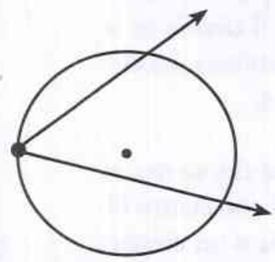


$\overset{\frown}{AC}$ Arco AC. Arco menor de extremos A y C.
$\overset{\frown}{BC}$ Arco BC. Arco menor de extremos B y C.
$\overset{\frown}{ACB}$ Arco ACB. Semicircunferencia de extremos A y B y que pasa por el punto C.
$\overset{\frown}{CAB}$ Arco CAB. Arco mayor de extremos C y B y que pasa por el punto A.

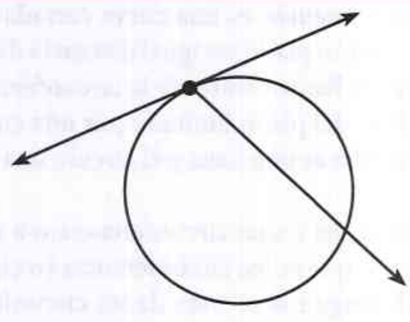
Ángulos



Ángulo central



Ángulo inscrito



Ángulo semiinscrito

Ángulo central es aquel que está formado por dos radios. Los ángulos centrales tienen su vértice en el centro de la circunferencia.

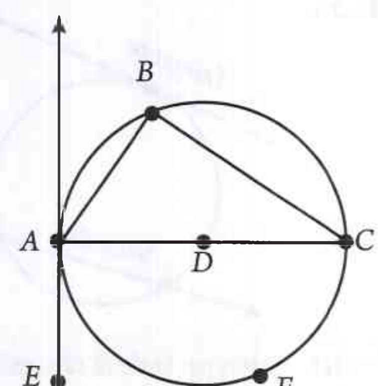
Ángulo inscrito es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes de la circunferencia.

Ángulo semiinscrito es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y uno de sus lados es secante y el otro es tangente.

Ejemplo

En la figura mostrada:

a) Nombra la circunferencia mostrada
b) Identifica dos cuerdas que no sean diámetros
c) Identifica un diámetro y un radio
d) Nombra un arco, un ángulo central, uno inscrito, y uno semiinscrito, cuyos lados intercepten el mismo arco.

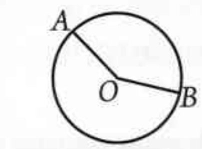


Solución

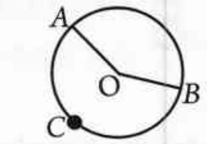
a) ɔD; se lee: circunferencia de centro D.
b) $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
c) Diámetro $\overline{AC}$. Radio $\overline{DC}$.
d) Arco BC; Ángulo central ADC; inscrito ABC y semiinscrito EAC.

Lee con atención

Un ángulo central separa a la circunferencia en dos arcos, uno menor y el otro mayor. Observa que para poder nombrar al arco mayor fue necesario considerar un tercer punto de la circunferencia.



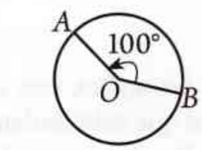
$\widehat{AB}$ es un arco menor de la $\odot O$



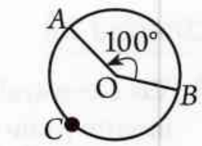
$\widehat{ACB}$ es un arco mayor de la $\odot O$

Los arcos se miden por sus correspondientes ángulos centrales. Para indicar la medida en grados de $\widehat{AB}$ escribimos $m\widehat{AB}$. Las medidas en grados se asignan a los arcos según las siguientes indicaciones:

> La medida en grados de un arco menor es la medida de su ángulo central. La medida en grados de un arco mayor es 360° menos la medida de su ángulo central. La medida en grados de una circunferencia es 360°. La medida en grado de una semicircunferencia es 180°.



$m\widehat{AB} = 100°$

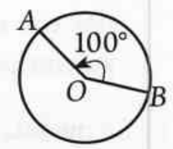


$m\widehat{ACB} = 360° - 100°$
$= 260°.$

También se puede usar la medida del ángulo central para determinar la ***longitud del arco***. La longitud del arco es diferente de la medida en grados de un arco. La longitud del arco es su distancia lineal. Para determinar la longitud de un arco puede considerarse que dicha longitud es la parte de la circunferencia proporcional a la medida del ángulo central comparada con la circunferencia completa cuya medida es 360° y cuya longitud es $2\pi r$.

Ejemplo

En la $\odot O$, $OB = 12$ cm y $\angle AOB = 100°$. Determina la longitud de $\widehat{AB}$.



$m\widehat{AB} = 100°$

Solución

Primero determina qué parte de la circunferencia está representada por el $\angle AOB$.

$$\frac{\text{Medida del ángulo central}}{\text{Medida de la circunferencia}} = \frac{100}{360} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{5}\times 5}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times 3\times 3\times\cancel{5}} = \frac{5}{18}$$

El ángulo es $\frac{5}{18}$ de la circunferencia; por tanto la longitud de $\widehat{AB}$ es $\frac{5}{18}$ de la longitud de la circunferencia.

$$\text{Longitud de } \widehat{AB} = \frac{5}{18}(2\pi r) = \frac{5}{18}(2\pi)(12) = \frac{20}{3}\pi = 6.67\pi = 20.95 \text{ unidades de longitud}$$

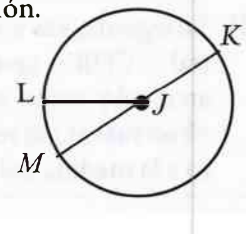
O bien: 100° es a 360°, como x es a $2\pi r \longrightarrow \frac{100°}{360°} = \frac{x}{2\pi r}$

$$x = \frac{100°(2\pi r)}{360°} = \frac{5(\pi r)}{9} = \frac{5(\pi)(12)}{9} = \frac{20\pi}{3}$$

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4 y 6

6.7 EJERCICIOS

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.
2. En la $\odot J$, KM es un diámetro tal que $JL = 18$ y $\angle KJL = 140°$. Determina la longitud de cada arco.
   a) $\widehat{LM}$
   b) $\widehat{KL}$
   c) $\widehat{LMK}$



6.8 Propiedades de ángulos en una circunferencia

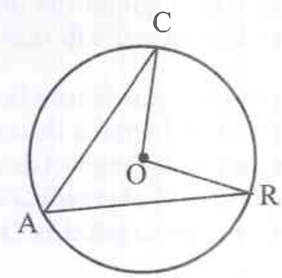
Los ángulos centrales, los ángulos inscritos y los semiinscritos están relacionados. En la siguiente actividad, explorarás algunas propiedades acerca de los ángulos de una circunferencia.

Utiliza GeoGebra

Actividad 12

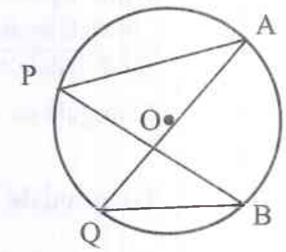
a) Vas a construir con Geogebra, una circunferencia con un ángulo inscrito y uno central que subtiendan el mismo arco, tal y como se muestra en la figura. Puedes seguir el siguiente procedimiento:

1. Usa la opción circunferencia y traza una.
2. Localiza tres puntos A, C y R sobre la circunferencia.
3. Traza el ángulo central COR y el inscrito CAR, tal que subtiendan el mismo arco $\overset{\frown}{CR}$.
4. Usa la opción «ángulo» para medir el ángulo central $\angle COR$ y el inscrito $\angle CAR$.
5. ¿Qué observas?¿Qué relación hay entre la medida del ángulo inscrito y la medida del ángulo central? Compara tus resultados con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:



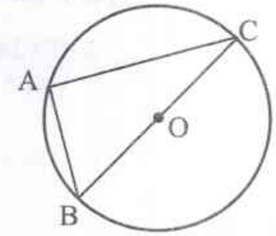
> La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de la medida del ángulo central que subtiende igual arco.

b) Ahora construye una circunferencia tal que los ángulos inscritos $\angle APB$ y $\angle AQB$ subtienden el mismo arco $\overset{\frown}{AB}$.
¿Qué relación hay entre la medida de los dos ángulos inscritos? Compara tus resultados con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:



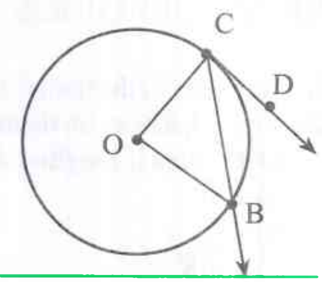
> Los ángulos inscritos que cortan el mismo arco son iguales.

c) Construye una circunferencia y dibuja un diámetro BC. Localiza un punto A sobre la circunferencia y únelo a cada extremo del diámetro. De esta manera, has dibujado un ángulo inscrito $\angle CAB$ que subtiende una semicircunferencia. ¿Cuánto mide este ángulo? Compara tu resultado con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:



> Los ángulos inscritos en una semicircunferencia miden 90°.

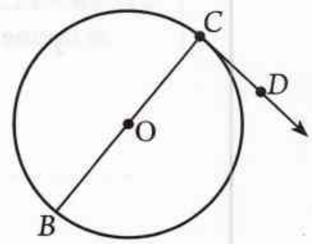
d) Enseguida, vas a construir una circunferencia con un ángulo central $\angle COB$ y uno semiinscrito $\angle DCB$ que subtiendan el mismo arco, tal y como se muestra en la figura. Mide estos ángulos. ¿Qué observas? ¿Qué relación hay entre la medida del ángulo semiinscrito y la medida del ángulo central?



Compara tu resultado con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:

La medida de un ángulo semiinscrito en una circunferencia es la mitad de la medida del ángulo central que subtiende igual arco.

e) Finalmente, construye una circunferencia y dibuja un diámetro. Traza una semirrecta tangente en un extremo del diámetro. De esta manera, has dibujado un ángulo semiinscrito $\angle BCD$ que subtiende una semicircunferencia. Mide este ángulo. ¿Qué observas? Compara tu resultado con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:

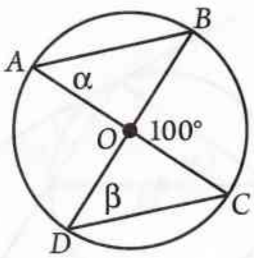


Los ángulos semiinscritos que tienen un lado que contiene a un diámetro miden 90°.

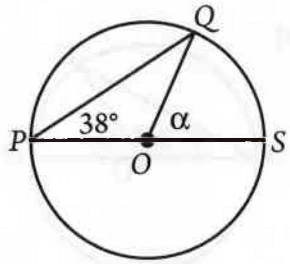
Ejemplo 1

Obtén la medida de los ángulos indicados en cada figura.

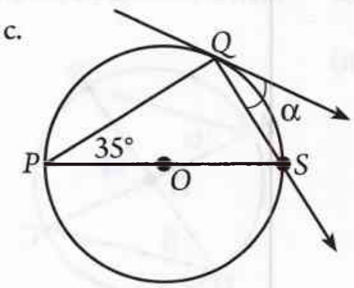
a.



b.



c.



Solución

a) $\alpha = \dfrac{100°}{2} = 50°$, porque un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.

$\beta = \dfrac{100°}{2} = 50°$, por la misma razón anterior.

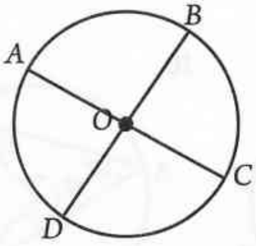
b) $\alpha = 2 \times 38° = 76°$, pues α es un ángulo central con igual arco que el ángulo inscrito $\angle QPS$.

c) $\alpha = 35°$, ya que ambos subtienden un arco igual al de un ángulo central de 70°.

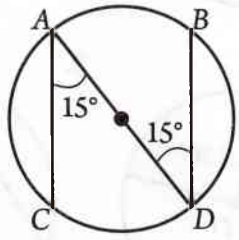
Ejemplo 2

Identifica los arcos iguales en cada figura.

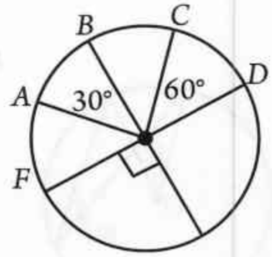
a)



b)



c)



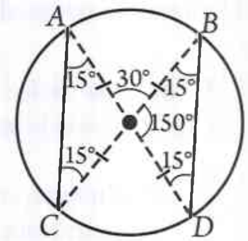
Solución

a) $\overparen{AB} = \overparen{DC}$ Corresponden a ángulos centrales iguales por ser opuestos por el vértice.

b) $\overparen{AD} = \overparen{BC}$ Por la misma razón señalada en a).

c) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Al trazar radios a partir de los puntos C y B, y aplicando la propiedad del triángulo isósceles y de los ángulos interiores de un triángulo, se observa que ambos arcos determinan ángulos centrales iguales a 30°.

d) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$. $\overset{\frown}{AB}$ se opone a un ángulo central de 30° y $\overset{\frown}{BC}$ también se opone a un ángulo de 30° (= 90° - 60°).



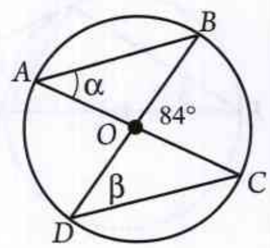
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4 y 6

6.8 EJERCICIOS

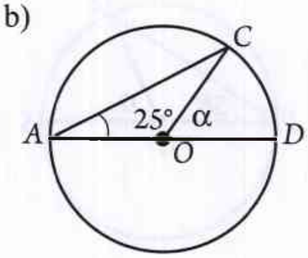
1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

2. Obtén la medida de los ángulos indicados en cada figura.

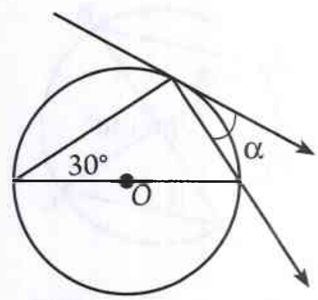
a)



b)

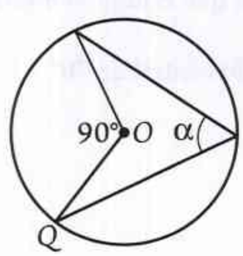


c)

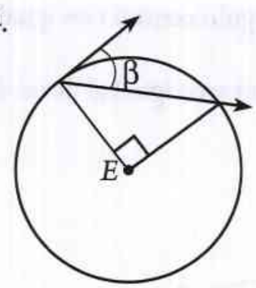


En los ejercicios 3 a 10 determina la medida de los ángulos indicados.

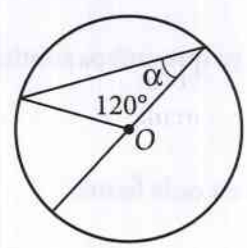
3.



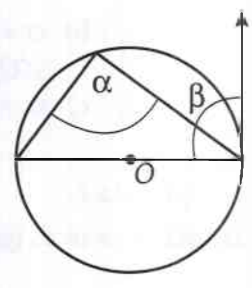
4.



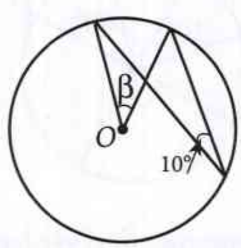
5.



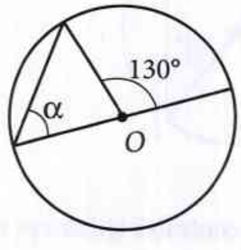
6.



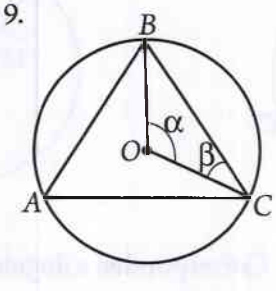
7.



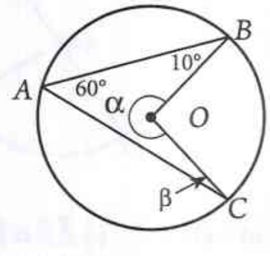
8.



9.



10.



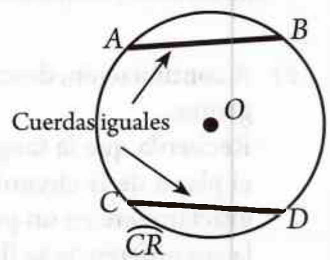
6.9 Propiedades de rectas y segmentos en una circunferencia

Realiza la siguiente actividad para que explores algunas propiedades de rectas y segmentos de la circunferencia.

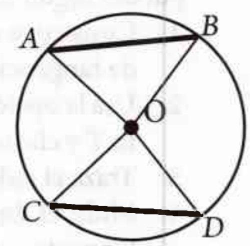
Actividad 13

Utiliza GeoGebra

a) Primero descubrirás la relación entre las cuerdas y sus ángulos centrales. Para ello, realiza lo siguiente:
Vas a construir con Geogebra, una circunferencia que contenga dos cuerdas iguales tal y como se muestra en la figura. Puedes seguir el siguiente procedimiento:

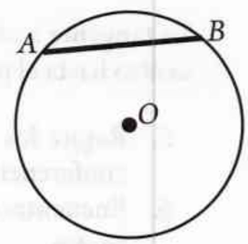


1. Usa la opción circunferencia y traza una.
2. Localiza dos puntos A y B, en la parte superior de la circunferencia y traza la cuerda $\overline{AB}$.
3. Localiza un punto C sobre la circunferencia en la parte inferior.
4. Usa la opción compás. Da clic en A, clic en B y clic en C. Aparecerá otra circunferecnia.
5. Encuentra el punto de intersección entre las dos circunferencias. Llámalo D. Traza la cuerda $\overline{CD}$ y oculta las dos circunferencias.
6. Traza los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$.
7. Mide los ángulos $\angle BOA$ y $\angle COD$.
8. ¿Qué observas? Compara tus resultados con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:

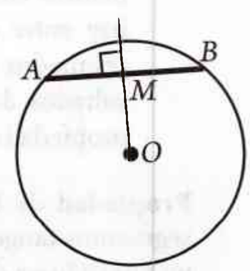


Si dos cuerdas de una circunferencia son iguales, entonces determinan dos ángulos centrales iguales.

b) A continuación, descubrirás dos propiedades relativas a las cuerdas y el centro del círculo. Puedes seguir el siguiente procedimiento:

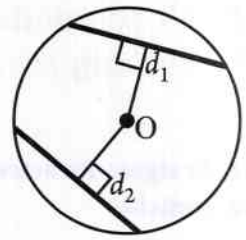


1. Construye la cuerda $\overline{AB}$ (repite los pasos 1 y 2 de la construcción anterior.
2. Traza una perpendicular a la cuerda que pase por el centro de la circunferencia. Marca con M el punto de intersección entre la cuerda y la perpendicular.
3. Compara las longitudes $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$. ¿Qué observas? Compara tus resultados con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:



La perpendicular que va del centro de una circunferencia a una cuerda, pasa por el punto medio de ésta; es decir, es la mediatriz de la cuerda.

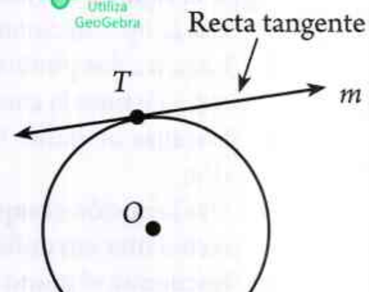
4. Repite los pasos necesarios para construir dos cuerdas iguales y traza a cada una la perpendicular que pase por el centro.
5. Mide y compara las distancias (medidas a lo largo de las perpendiculares) desde el centro hasta las cuerdas. ¿Qué relación hay entre estas distancia? Compara tus resultados con el resto del grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:



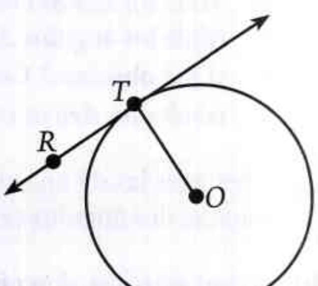
Dos cuerdas iguales de una circunferencia son equidistantes desde el centro de la circunferencia. Es decir, las distancias entre las cuerdas y el centro son iguales.

c) A continuación, descubrirás dos propiedades relativas a las tangentes.
Recuerda que la tangente a una circunferencia es una recta en el plano de la circunferencia que intersecta a la circunferencia exactamente en un punto. El punto en el que la tangente toca a la circunferencia se llama **punto de tangencia.**
Para explorar con Geogebra las propiedades de estas tangentes, puedes seguir el siguiente procedimiento:

Utiliza GeoGebra

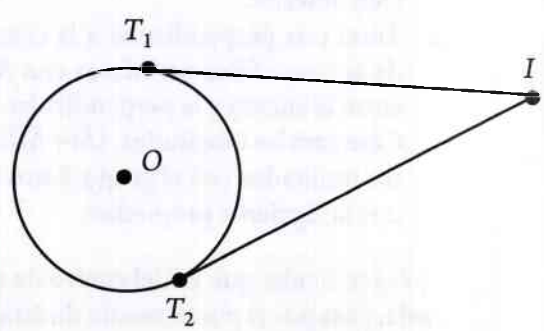


1. Construye una circunferencia y localiza sobre ella el punto de tangencia T.
2. Usa la opción «tangente», a continuación da clic en el punto T y clic sobre la circunferencia (aparecerá la tangente).
3. Traza el radio OT y localiza el punto R sobre la tangente.
4. Mide el ángulo $\angle RTO$, formado por el radio y la recta tangente. ¿Qué observas? Compara tus resultados con el grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:



La tangente a un círculo es perpendicular al radio trazado del centro hasta el punto de tangencia.

5. Repite los pasos necesarios para construir ahora, una circunferencia pero con dos rectas tangentes.
6. Encuentra el punto de intersección entre las dos rectas tangentes.
7. Mide y compara las longitudes de los segmentos tangentes T_1I y T_2I. ¿Qué relación hay entre estas longitudes? Compara tus resultados con el resto del grupo. Estos resultados deben coincidir con la siguiente propiedad:



Propiedad de los segmentos tangentes. Los segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto fuera de la circunferencia, son iguales.

6.9 EJERCICIOS

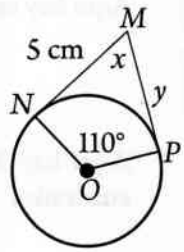
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4 y 6

1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

2. En la figura adjunta, $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$ son tangentes a la circunferencia. Determina:

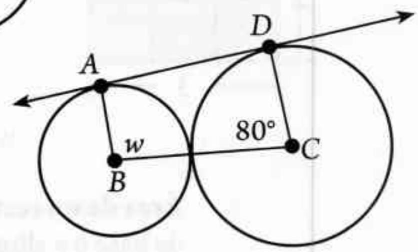
   $\angle x =$ _____

   $y =$ _____



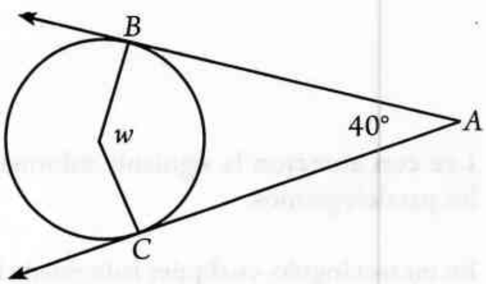
3. En la figura adjunta, $\overleftrightarrow{AD}$ es tangente tanto a la circunferencia de centro B como a la circunferencia de centro C. Calcula:

   $\angle w =$ _____



4. En la figura adjunta, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son tangentes a la circunferencia. Calcula:

   $\angle w =$ _____

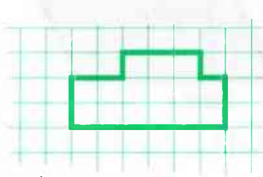


6.10 Área de paralelogramos, triángulos y trapecios

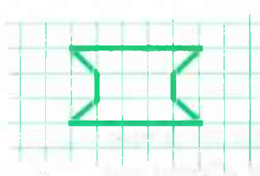
Lee atentamente la siguiente información relacionada con el área. Resuelve lo solicitado.

El área de una figura plana es el número de unidades cuadradas que pueden acomodarse de manera que llenen la figura completamente.

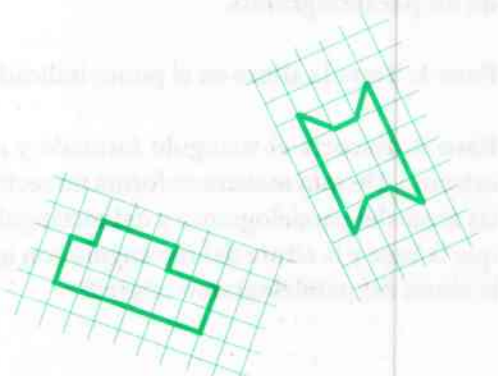
Determina las unidades cuadradas de las siguientes figuras:



Área = ________



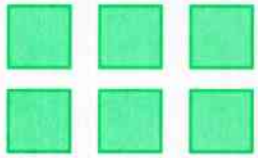
Área = ________



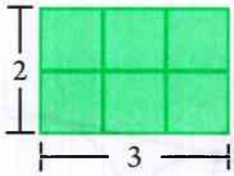
¿Cambiará el área si rotamos las figuras? ______

¿Por qué?__________________

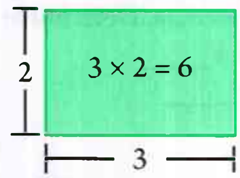
A continuación recordaremos la fórmula para calcular el área de un rectángulo. Considera las seis unidades cuadradas indicadas.



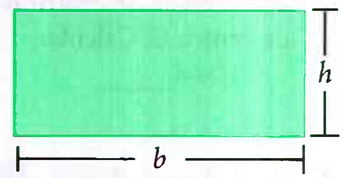
Aquí hay seis unidades cuadradas



Aquí hay 3×2 = 6 unidades cuadradas

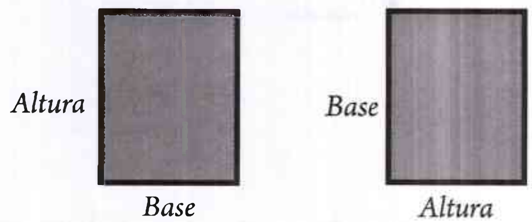


Área de un rectángulo. El área de un rectángulo de base b y altura h está dada por la fórmula $\boldsymbol{bh}$.

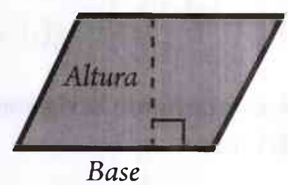


Lee con atención la siguiente información relativa a los paralelogramos.

En un rectángulo, cualquier lado puede llamarse base.



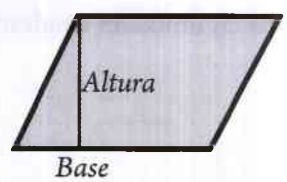
En el caso de un paralelogramo, también cualquier lado puede ser la base. Sin embargo, la altura de un paralelogramo no es necesariamente un lado. Más bien, la altura es la longitud de cualquier segmento con extremo en el lado opuesto a la base y perpendicular a dicha base.



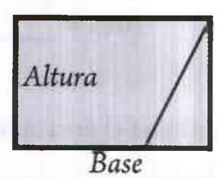
Sigue los pasos para para formar un rectángulo a partir de un paralelogramo.

Paso 1. Traza la altura en el punto indicado

Paso 2. Recorta el triángulo formado y colócalo en el otro extremo. De esta manera se forma un rectángulo. ¿Cómo son las áreas del paralelogramo y del rectángulo? Debes observar que la base y la altura del rectángulo son iguales que la base y la altura del paralelogramo original.



PASO 1



PASO 2

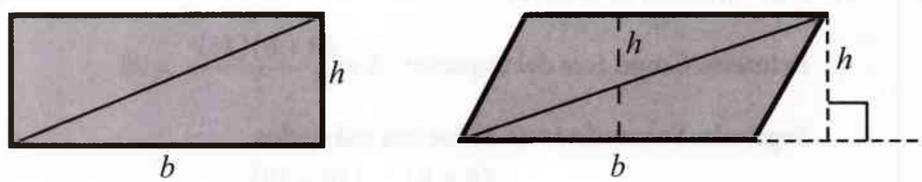
Como las áreas del rectángulo y del paralelogramo son iguales, el área del paralelogramo es *base* × *altura*. Esto puede resumirse como sigue:

Área de un paralelogramo. El área de un paralelogramo se expresa por la fórmula $A = bh$, donde A es el área, b es la longitud de la base, y h es la altura del paralelogramo.

A continuación sigue los pasos siguientes para descubrir la fórmula del área de un triángulo.

Paso 1. Dibuja un rectángulo y un paralelogramo. Traza en ambas figuras una diagonal. De esta forma cada figura queda dividida en dos triángulos congruentes y por consiguiente triángulos de igual área.

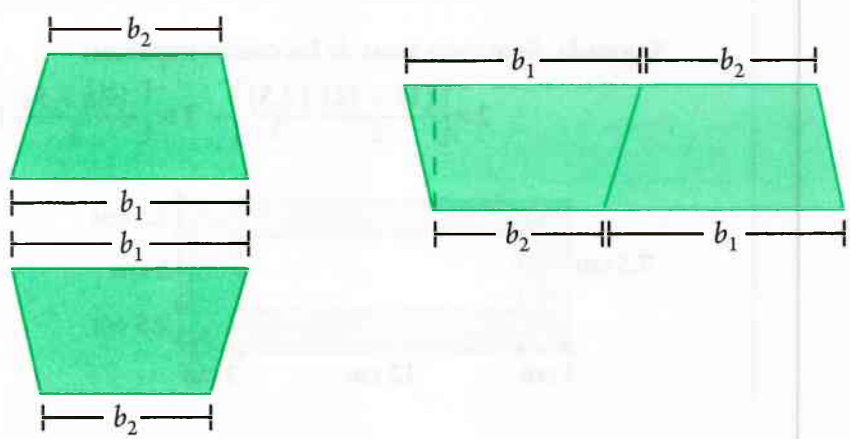
Paso 2. Traza la altura en cada figura. Observa que, tanto la base como la altura del rectángulo y del paralelogramo coinciden con las de los triángulos en los que se han dividido. Con las observaciones hechas, y considerando que tanto el área del rectángulo como del paralelogramo es *base* × *altura*, escribe una expresión para el área de uno de los triángulos. ______________



Tus conclusiones deben coincidir con lo siguiente:

Área de un triángulo. El área de un triángulo se expresa por la fórmula $A = \frac{bh}{2}$ donde A es el área, b es la longitud de la base, y h es la altura del triángulo.

Ahora, dibuja dos trapecios iguales, recórtalos y colócalos de tal manera que formen un paralelogramo.



¿Cuál es la longitud de la base del paralelogramo?______________ ¿Cuál es la altura?______ Usa tus respuestas para escribir una expresión para el área del paralelogramo. Después, usa la expresión del área del paralelogramo para escribir una expresión para el área de un trapecio.____________

Tus conclusiones deben coincidir con lo siguiente:

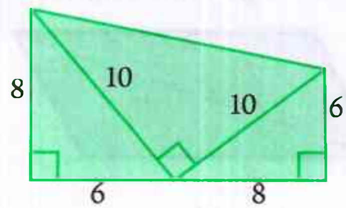
Área de un trapecio. El área de un trapecio se expresa por la fórmula $A = \dfrac{(b_1 + b_2)h}{2}$ donde A es el área, b_1 y b_2 son las longitudes de las dos bases, y h es la altura del trapecio.

Estudia el siguiente ejemplo:

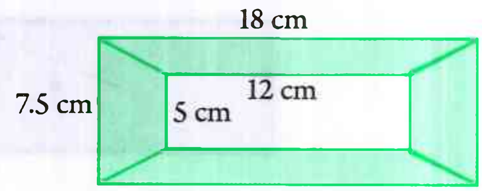
Ejemplo

Calcular el área sombreada de las siguientes figuras.

a)



b)



Solución

a) Dos maneras de resolver:

Primera. Como área del trapecio: $A = \dfrac{(8+6)(14)}{2} = 98$

Segunda. Sumando áreas de los tres triángulos:

$$2 \times \frac{(6 \times 8)}{2} + \frac{(10 \times 10)}{2} = 48 + 50 = 98$$

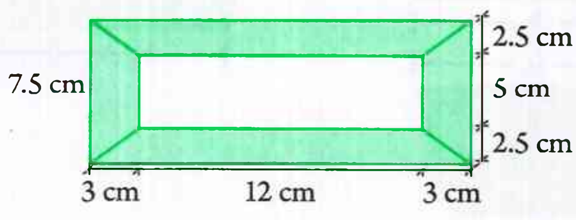
b) Dos maneras de resolver

Primera. Restando áreas de rectángulos:

$$(7.5 \times 18) - (5 \times 12) = 135 - 60 = 75 \text{ cm}^2$$

Segunda. Sumando áreas de los cuatro trapecios:

$$2 \times \left[\frac{(18+12)}{2} \frac{(2.5)}{2} \right] + 2 \times \left[\frac{(7.5+5)}{2} (3) \right] = 37.5 + 37.5 = 75 \text{ cm}^2$$



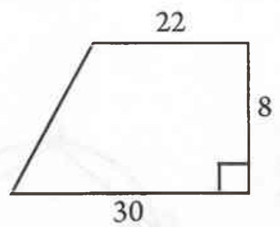
6.10 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4 y 6

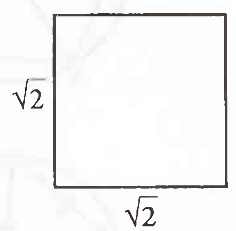
1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.

2. En los ejercicios a) a d) calcula el área de cada figura. Hazlo de dos formas distintas en las figuras que tienen líneas interiores.

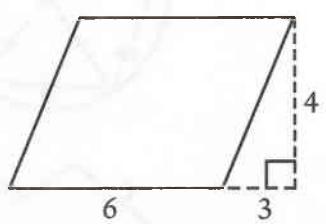
a)



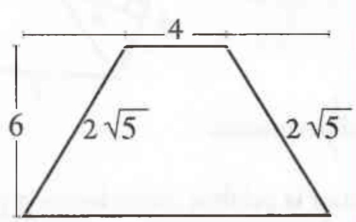
b)



c)

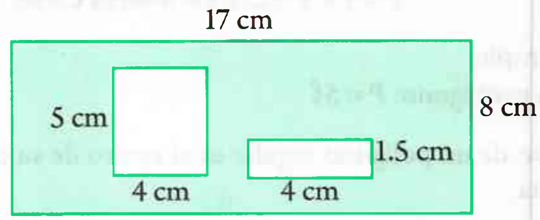


d)

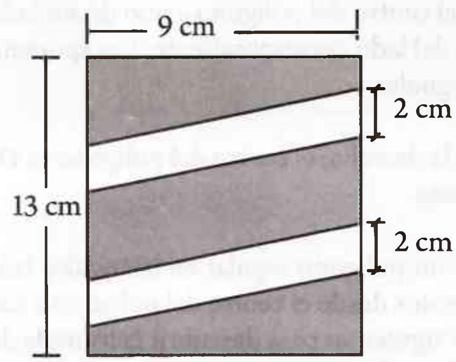


3. Encontrar el área de la región sombreada.

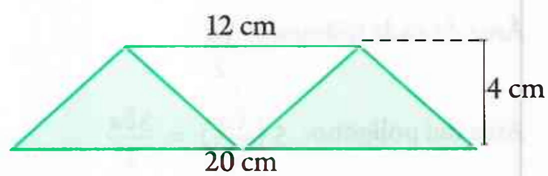
a)



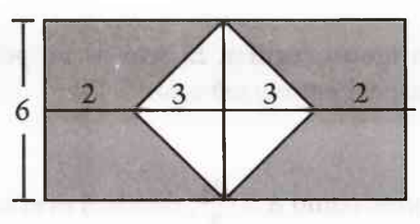
b)



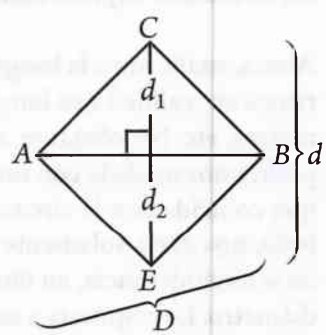
c)



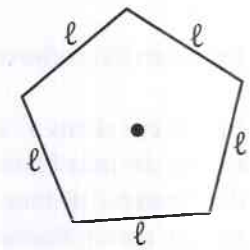
d)



4. A partir de las propiedades básicas, deducir la fórmula para el área de un rombo.
(Sugerencia: Área del rombo = Área del ΔABC + Área del ΔAEB)



6.11 Área y perímetro: polígonos regulares, circunferencia y círculo

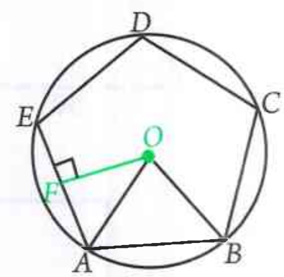


Lee atentamente la siguiente información relacionada con perímetros y áreas.
El perímetro de un polígono regular es la suma de sus n lados.

$$P = \ell + \ell + \ldots + \ell = n \text{ veces } \ell = n\ell$$

Ejemplo
Para un pentágono: $P = 5\ell$

El centro de un polígono regular es el centro de su circunferencia circunscrita.



Apotema de un polígono regular es el segmento perpendicular trazado desde el centro del polígono a uno de sus lados. La apotema es la mediatriz del lado correspondiente. Las apotemas de un polígono regular son iguales.

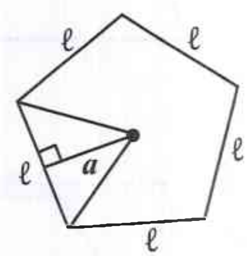
En la figura de la derecha, el centro del polígono es O.
$\overline{OF}$ es la apotema.

Puedes dividir un polígono regular en triángulos isósceles iguales, dibujando segmentos desde el centro del polígono a cada vértice.
Sigue los pasos siguientes para descubrir la fórmula del área de un polígono regular. Completa.

Área de cada triángulo: $\dfrac{\ell a}{2}$

Área del polígono: $5\left(\dfrac{\ell a}{2}\right) = \dfrac{5\ell a}{2}$

pero, 5ℓ es el ________ del polígono



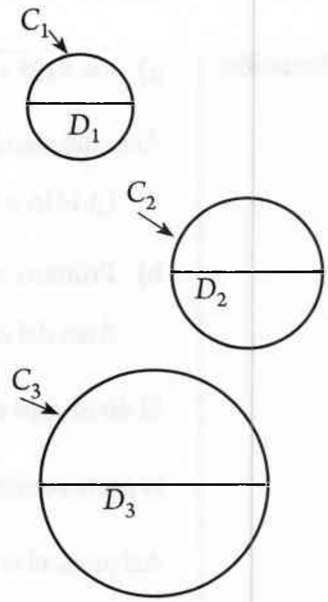
Área de un polígono regular. El área de un polígono regular es igual a *perímetro por apotema sobre dos.*

En fórmula se expresa como $A = \dfrac{Pa}{2}$, donde A es el área, y P es el perímetro.

Ahora, analicemos la **longitud de la circunferencia.** Es común usar la palabra circunferencia para referirnos en realidad a su longitud. La circunferencia se mide en unidades lineales, tales como centímetros, metros, etc. No obstante, una circunferencia no es recta; cambia constantemente su dirección. ¿Cómo podríamos medirla con una regla? Podemos colocar un pedazo de cordón cuidadosamente, de manera que coincida con la circunferencia; cortarlo y después ponerlo sobre una regla. Sin embargo, este método, nos daría solamente un valor aproximado. Necesitamos una fórmula para encontrar la longitud de la circunferencia, en términos de longitudes que puedan medirse fácilmente, tales como el radio y el diámetro. La respuesta a esta cuestión, se encuentra con la definición del ***número phi*** **(π).**

El número π, surge a partir del siguiente hecho: Si dividimos la longitud de dos o más circunferencias entre sus respectivos diámetros, obtendremos siempre el mismo resultado y es a este resultado constante al que se le llama π.

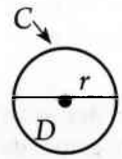
$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2} = \frac{C_3}{D_3} = \text{constante} = \pi$$



El número π, es un *número irracional* por lo que su parte decimal es infinita y no periódica. Debido a que este número con sus primeros cinco decimales es 3.14159..., se acostumbra usar el siguiente valor para π:

$$\pi = 3.1416$$

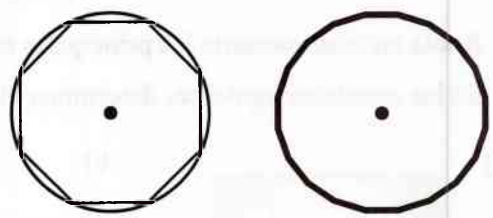
Entonces, ya podemos calcular la longitud de una circunferencia C cualquiera, con diámetro D:



$$\frac{C}{D} = \pi$$

por lo tanto:
$C = \pi D = \pi(2r) = 2\pi r$

Para establecer una fórmula para el área de un círculo, se considera que la longitud de la circunferencia y el área del círculo son respectivamente los ***límites*** de los perímetros y áreas de polígonos regulares inscritos.



Si $n \to \infty$
$a \to r$
$P \to 2\pi r$

Así, el área de un círculo puede obtenerse reemplazando, en la expresión $\frac{Pa}{2}$, los valores $2\pi r$ en lugar de P, y r en lugar de a. Ésto conduce a: $\frac{(2\pi r)r}{2} = \pi r^2$

Entonces:

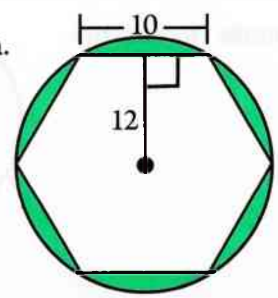
El área de un círculo se expresa por la fórmula $A = \frac{(2\pi r)r}{2} = \pi r^2$, donde A y r son el área y el radio del círculo respectivamente.

Estudia el siguiente ejemplo:

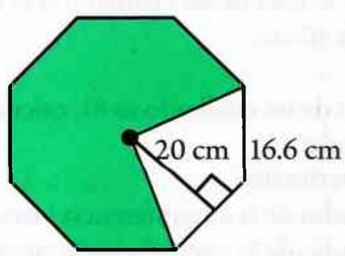
Ejemplo

Calcular el área sombreada de las siguientes figuras.

a.

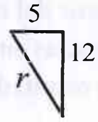


b.



Solución

a) $r = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$



Área del círculo menos área del hexágono:

$$(3.1416 \times 13^2) - \frac{(6 \times 10)}{2}(12) = 530.9 - 360 = 170.9$$

b) Primero, encuentra el área de todo el octágono.

$$\text{Área del octágono} = \frac{(Pa)}{2} = \frac{8 \times 16.6 \times 20}{2} = 1328$$

Si dividimos el octágono en ocho triángulos isósceles (los cuales son iguales), entonces la parte sombreada constituye $\frac{6}{8}$ del octágono.

Así pues, el área sombreada es: $\frac{6}{8}$ $(1328 \text{ cm}^2) = 996 \text{ cm}^2$

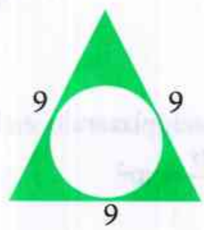
6.11 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4 y 6

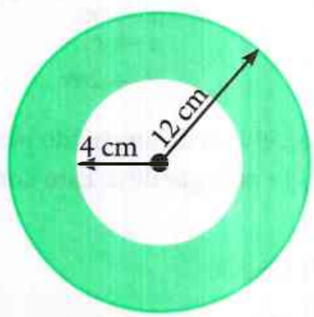
1. Anota en tu diccionario los principales conceptos y propiedades de esta lección.
2. En los ejercicios siguientes determinar el área de cada región sombreada.

a)

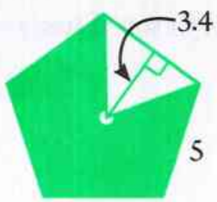
b)



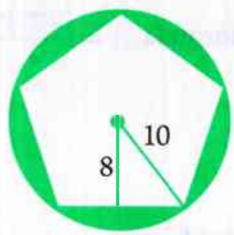
c)



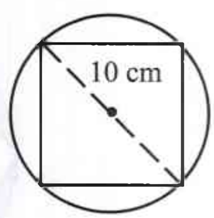
d)



e)



3. Calcular el área de un cuadrado si el radio de la circunferencia circunscrita a él es de 10 cm.



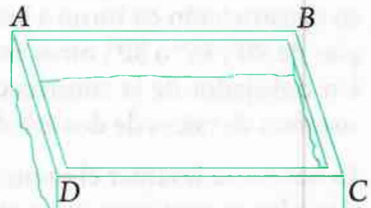
4. Si el área de un cuadrado es 81, calcular:
   a) Su lado.
   b) Su perímetro
   c) El radio de la circunferencia inscrita.
   d) El radio de la circunferencia circunscrita.

EXAMEN 6 (PROBLEMARIO)

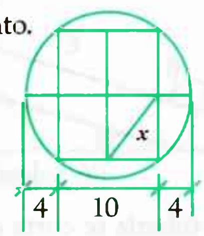
- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de la unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar:* 2 y 4

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. Los cimientos de concreto de una casa tienen una forma rectangular un poco mayor que el rectángulo de la casa. En estos cimientos, el contratista debe localizar cuatro puntos, *A*, *B*, *C* y *D*, que serán las esquinas de la casa. Estos cuatro puntos deben localizarse con precisión para que *ABCD* sea un rectángulo perfecto. Después de medir para hacer que *AB* = *CD* y *AD* = *BC*, el paso siguiente es medir las diagonales. Si *AC* = *BD*, entonces *ABCD* es un rectángulo. Explique porqué es correcto este procedimiento.



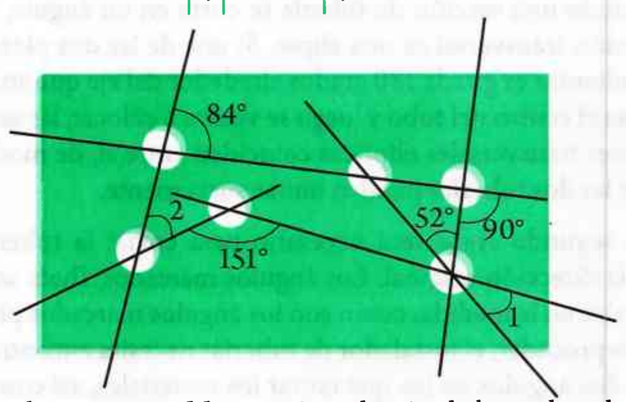
Problema2. ¿Cuál es la longitud de x en la figura?



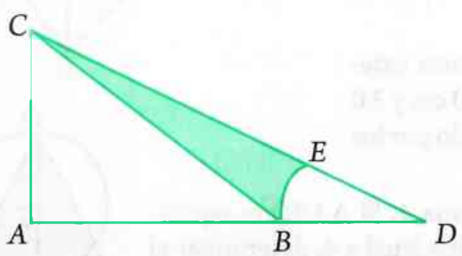
Problema 3. En una placa de acero se van a taladrar unos agujeros como se muestra en la figura.

a) Si $\angle x = 37°$, encuéntrese $\angle 2$

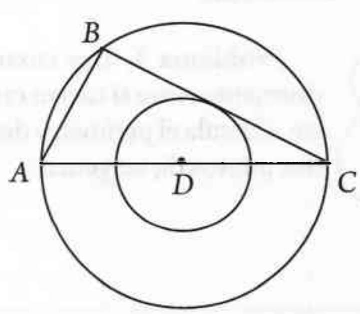
b) Si $\angle x = 43°$, encuéntrese $\angle 2$



Problema 4. En la figura, ΔABC es isósceles, $\overline{CA} \perp \overline{AB}$, *B* está sobre el lado *AD* y $\angle ADC = 30°$. Haciendo centro en *D* traza el arco *BE*. Si el área de ΔABC es de 18 cm^2, calcula el área de la región sombreada.



Problema 5. La relación de los radios de dos círculos concéntricos es 1: 3. Si *AC* es un diámetro del círculo más grande, *BC* es una cuerda del círculo más grande que es tangente al círculo más pequeño, y *AB* = 12, encuentre el radio del círculo más grande.



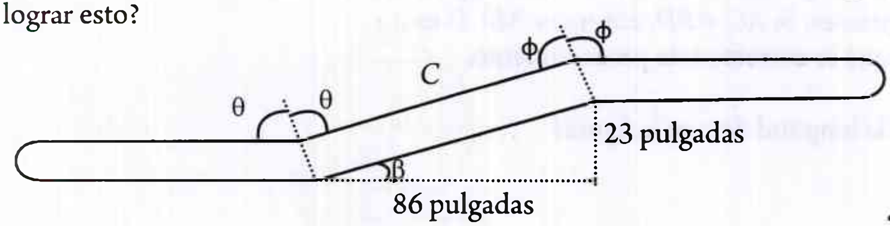
EXAMEN SEMESTRAL (PROBLEMARIO)

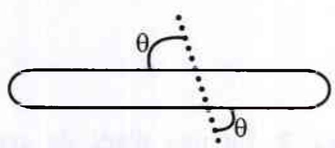
- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador del curso
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 2

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

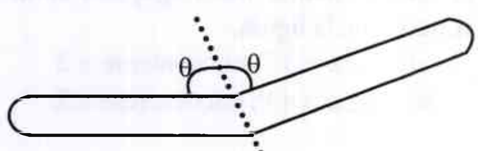
Problema 1. Las personas que trabajan en los oficios de construcción a veces necesitan desviar su construcción en torno a los obstáculos. A pesar de que a menudo utilizan desplazamientos simples de 90°, 45° o 30°, otros ángulos a veces son necesarios en áreas donde el espacio es limitado. Un trabajador de la construcción necesita reorientar un tubo subterráneo con el fin de evitar los sistemas de raíces de dos árboles.

Es necesario levantar el camino de su tubo de 23 pulgadas sobre una distancia de más de 86 pulgadas, y luego continuar en un curso paralelo a la de la tubería original. ¿Qué ángulos debe cortar para lograr esto?



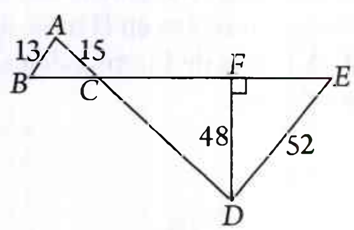


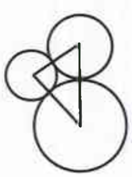
Cuando una sección de tubería se corta en un ángulo, la sección transversal es una elipse. Si una de las dos piezas resultantes es girada 180 grados alrededor del eje que atraviesa el centro del tubo y luego se vuelve a colocar, las secciones transversales elípticas coinciden entre sí, de modo que las dos tuberías pueden unirse suavemente.



Un segundo corte será necesario para enviar la tubería en la dirección original. Los ángulos marcados Theta son iguales en la medida, como son los ángulos marcados phi. Para proceder, el instalador de tuberías necesita encontrar los dos ángulos en los que cortar los materiales, así como la longitud C de la pieza de conexión. Determina tales medidas.

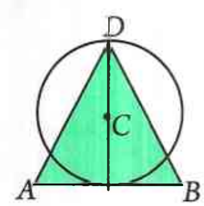
Problema 2. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ y $\overline{DF} \perp \overline{CE}$. Determina el perímetro de ΔCDE. Explica completamente cómo encontraste tus respuestas y cómo sabes que están conectadas.





Problema 3. Tres circunferencias tangentes exteriormente entre sí tienen radios de 1.0 cm, 2.0 cm y 3.0 cm. Calcula el perímetro del triángulo formado por los tres puntos de tangencia.

Problema 4. Si ΔABD es equilátero de lados igual a 4, determinar el área en blanco.



Bibliografía

1. Benítez, R. *Geometría plana*. Trillas, México, 2007.
2. Clemens, S., O´Daffer, P., y Cooney, T. Geometrá. Pearson, México, 1998.
3. Clark, D. *Evaluación constructiva en matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2002.
4. Cuéllar, C. Juan Antonio. *Matemáticas II para bachillerato*. McGrawHill, México, 2005.
5. Discovering Geometry. Materiales diversos. 2004- 2008.
6. Flórez Arco, A. Ylé Martínez, A. y Juárez Duarte, J. A. *Geometría y trigonometría.* DGEP-UAS, México, 2005.
7. Filloy Eugenio y Rojano Teresa. *Geometría*. Grupo Editorial Iberoamericano, México, 2001.
8. Fuenlabrada, S. *Matemáticas II: Geometría y trigonometría.* McGrawHill, México, 2005.
9. Gail F. Burrill, *et al. Geometría: Integración, aplicacioes, conexiones.* Mc Graw Hill. México, 1998.
10. García J. M. Y López R. G. Geometría y Trigonometría. Esfinge. México, 2003.
11. Geltner, P. y Peterson, D. *Geometría.* Thomson, México, 1998.
12. Himmelstine C. L. Matemáticas 12. Continental. México, 1981.
13. Martínez M. A. *Matemáticas II: Geometría y trigonometría.* McGrawHill, México, 1997.
14. May Moreno José Alberto, *et al. Matemáticas 3: Trigonometría y geometría analítica* básicas. Editorial progreso. México, 2003..
15. Ortiz Campos, F.J. *Matemáticas II.* Publicaciones Cultural. México, 2006.
16. Perero, M. *Historia e historias de matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994.
17. Bulajich, R. y Gómez, J. Geometría. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas. UNAM, México, 2014.
18. Ruiz Basto, J. *Matemáticas II: Geometría y trigonometría*. Publicaciones cultural. México, 2005.
19. Salazar V.P. y Sánchez G.S. *Matemáticas II.* Nueva Imágen. México, 2001.
20. Smith, *et al. Álgebra: trigonometría y geometría analítica*. Addison Wesley Longman. México, 1998.
21. Swokowski, E. y Cole, J. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* Cengase Learning, México 2009.
21. Wentworth y Smith. *Geometría.* Editorial Ginn, United Estates of América, 1915.

MATEMÁTICAS III
Geometría y trigonometría
José Alfredo Juárez Duarte, Arturo Ylé Martínez, Armando Flórez Arco

Se terminó de imprimir en el mes de agosto de 2019
en los talleres gráficos de Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. de C.V.,
Río Usumacinta No. 821 Col. Industrial Bravo
Tel. 712-2950 Culiacán, Sin.

La edición consta de 20 000 ejemplares


ONOMA DE SINALOA
VERSUS